第41卷第2期 新疆大学学报(自然科学版中英文) Vol.41, No.2
2024年3月 Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English) Mar., 2024

一类笛卡儿积图中完美匹配扩充为哈密顿圈*

张子凡，杨卫华†
(太原理工大学 数学学院，山西 晋中 030600)

摘 要： 令$Q_3\square C_q = Q^1Q^2\cdots Q^q$为三维超立方体与圈的笛卡儿积图，$Q^i(1\le i\le q)$同构于$Q_3$，$M$为$Q_3\square C_q$的完美匹配．依据每个$Q_3$中是否有点被连接两个$Q_3$的$M$中边饱和，把$Q_3\square C_q$表示成$block1$和$block2$交替出现的序列．研究了$Q_3\square C_q$中完美匹配$M$扩充为哈密顿圈的充分条件，证明了以下结论：$q\ge 1$，$S=\left\{Q^1,Q^2,\cdots,Q^q\right\}$，如果满足下列条件之一，则$M$可以扩充为哈密顿圈：(1) M中边均在Q_3中；(2) 任意$Q^i\in S$中都存在点被$M\left(Q^{i-1},Q^i\right)$或$M\left(Q^i,Q^{i+1}\right)$饱和；(3) $Q_3\square C_q$中至少各存在一个$block1$和$block2$，且每个$block2$中第一个Q^i与最后一个Q^j分别被$M\left(Q^i,Q^{i+1}\right)$与$M\left(Q^{j-1},Q^j\right)$饱和的点的数量均为2.

关键词： 哈密顿圈; 完美匹配; 笛卡儿积图

DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316. 2023.12.10.0001

中图分类号： O157.5 **文献标识码：** A **文章编号：** 2096-7675(2024)02-0209-09

引文格式： 张子凡，杨卫华. 一类笛卡儿积图中完美匹配扩充为哈密顿圈[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文)，2024，41(2)：209-217.

英文引文格式： ZHANG Zifan，YANG Weihua. Perfect matchings extendibility in Cartesian product of 3-dimensional hypercube and cycle[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)，2024，41(2)：209-217.

Perfect Matchings Extendibility in Cartesian Product of 3-Dimensional Hypercube and Cycle

ZHANG Zifan, YANG Weihua
(*College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Jinzhong Shanxi 030600, China*)

Abstract： Let $Q_3\square C_q=Q^1Q^2\cdots Q^q$ be the Cartesian product of 3-dimensional hypercube and circle and M be a perfect matching of $Q_3\square C_q$, Q^i in $Q_3\square C_q$ is isomorphic to Q_3. $Q_3\square C_q$ can be divided into $block1$ and $block2$ alternating sequences according to whether Q^i is somewhat covered by $M\left(Q^{i-1},Q^i\right)$ or $M\left(Q^i,Q^{i+1}\right)$. This paper mainly studies the sufficient conditions for extending the perfect matching M of $Q_3\square C_q$ to a Hamiltonian cycle, and proves the following conclusions: $q\ge 1$, $S=\left\{Q^1,Q^2,\cdots,Q^q\right\}$, if one of the following conditions is true, M can be extended to a Hamiltonian cycle: (1) every edge in M joins two vertices in the same canonical Q_3; (2) for any $Q^i\in S$, there are vertices that are covered by $M\left(Q^{i-1},Q^i\right)$ or $M\left(Q^i,Q^{i+1}\right)$; (3) $Q_3\square C_q$ contains at least one $block1$ and one $block2$, and in every $block2$, two vertices in the first canonical Q^i are covered by $M\left(Q^i,Q^{i+1}\right)$ and two vertices in the last canonical Q^j are covered by $M\left(Q^{j-1},Q^j\right)$.

Key words： Hamiltonian cycle; perfect matching; Cartesian product

0 引 言

图G顶点集和边集分别用$V(G)$和$E(G)$表示．n维超立方体Q_n顶点集为$V(Q_n)=\{(x_1x_2\cdots x_n)|x_i\in\{0,1\}\}$，任意两个顶点之间有边当且仅当它们仅有一个坐标不同. 包含图G的每个顶点的路称为G的哈密顿路, 类似的, G的哈密顿圈是指包含图G的每个顶点的圈. 众所周知, 当$n\ge 2$时, Q_n中存在哈密顿回路. 随后, 学者们对超立方体中满足一些附加性质的哈密顿圈进行了研究, 相关结果可参阅文献[1−4].

* 收稿日期：2023-12-10
基金项目：国家自然科学基金“连通性条件下图的长圈结构若干问题研究”（12371356）.
作者简介：张子凡（1998—），女，硕士生，从事图论及其应用的研究，E-mail：zzf_zifan@163.com.
† 通讯作者：杨卫华（1984—），男，博士，教授，主要从事图论及其应用的研究，E-mail：yangweihua@tyut.edu.cn.

对于$M\subseteq E(G)$, 若M中任意两条边在图G中均不相邻, 则称M是图G的一个匹配, 与M中边相关联的点称为被M饱和的点. 若M饱和了图G中所有点, 那么M为图G的一个完美匹配. Ruskey和Savage[5]提出猜想: 超立方体中任意匹配可扩充为哈密顿圈. Zulkoski等[6]利用计算机算法, 证实了该猜想在$n\leq 5$时成立. Wang和Zhao[7]给出了$n=5$时结论成立的具体证明. 关于可以扩充为Q_n中哈密顿圈的匹配阶数, 学者们也给出了一些结论, 相关结果可以在文献[2,8−9]中查询. 最新的结论由Dvořák和Fink[10]得到, 他们将超立方体中可以扩充为哈密顿圈的匹配阶数提高到$n^2/16+n/4$.

设$K(G)$是以$V(G)$为顶点集的完全图. 1996年, Kreweras[11]在Ruskey和Savage[5]猜想的基础上提出新的猜想: 超立方体中完美匹配可扩充为哈密顿圈. Fink[12]证实了这一猜想并给出了更强的结论: $K(Q_n)$中任意完美匹配可由Q_n中边扩充为哈密顿圈. 由此展开了对图的完美匹配扩充为哈密顿圈的充分必要条件的研究. Alahmadi等[13]在研究超立方体的正则生成子图与哈密顿性时, 对3-正则图上完美匹配扩充为哈密顿圈进行了完整的刻画, 并得出了一些笛卡儿积图上的相关结论. Gauci和Zerafa研究了几类特殊的4-正则图上完美匹配扩充为哈密顿圈的性质[14−15].

在本文中, 我们主要研究一类特殊的5-正则图$Q_3\Box C_q$中完美匹配可以扩充为哈密顿圈的充分条件, 并证明了结论.

定理 1 M是$Q_3\Box C_q=Q^1Q^2\cdots Q^q$的完美匹配, $q\geq 1$, $S=\{Q^1,Q^2,\cdots,Q^q\}$为$Q_3\Box C_q$中所有Q_3的集合, 若满足下列条件之一, 则M可以扩充为哈密顿圈:

(1) M中边均在Q_3中;

(2) 任意$Q^i\in S$中都存在点被$M(Q^{i-1},Q^i)$或$M(Q^i,Q^{i+1})$饱和;

(3) $Q_3\Box C_q$中至少各存在一个$block1$和$block2$, 且每个$block2$中第一个Q^i与最后一个Q^j分别被$M(Q^i,Q^{i+1})$与$M(Q^{j-1},Q^j)$饱和的点的数量均为2.

假设两个图G和H, 满足$V(G)=V(H)$, $E(G)\supseteq E(H)$. 如果图H中任意完美匹配M可扩充为哈密顿圈, 显然M也可扩充为G中哈密顿圈. 为了证明定理1, 我们先引入定理2.

定理 2 M是$Q_3\Box P_q=Q^1Q^2\cdots Q^q$的完美匹配, $q\geq 1$, $S=\{Q^1,Q^2,\cdots,Q^q\}$为$Q_3\Box P_q$中所有Q_3的集合, 若满足下列条件之一, 则M可以扩充为哈密顿圈:

(1) M中边均在Q_3中;

(2) 任意$Q^i\in S$中都存在点被$M(Q^{i-1},Q^i)$或$M(Q^i,Q^{i+1})$饱和;

(3) $Q_3\Box P_q$中至少各存在一个$block1$和$block2$, 且每个$block2$中第一个Q^i与最后一个Q^j分别被$M(Q^i,Q^{i+1})$与$M(Q^{j-1},Q^j)$饱和的点的数量均为2.

1 预备知识

对于$V\subseteq V(G)$, $G[V]$表示图G在V上的导出子图, $G-V$表示$G[V(G)\setminus V]$. 设P_{ab}是一条以a,b为端点的路. 如果$V(P_{ab})\cap V(P_{bc})=\{b\}$, 则用$P_{ab}+P_{bc}$表示$a,c$间的一条路. 特别的, P_{ab}长度为1时, 用ab表示P_{ab}. 如果$P_q=x_1x_2\cdots x_q$上x_1和x_q有边相连, 称它为圈C_q. 本文中的m路, 指长度为m的路.

在超立方体Q_n中, 定义两点$u=u_1u_2\cdots u_n$和$v=v_1v_2\cdots v_n$之间的距离为$d(u,v)=|\{i|u_i\neq v_i\}|$. 当$d(u,v)=n$时, 称$u,v$是一对对立点, 或$u,v$对立. 用$\dim(uv)=\{i|u_i\neq v_i\}$表示边$uv$的维度. 相似的, 可以定义边集$E\subseteq E(Q_n)$的维度, 令$\dim(E)=\{i\in\dim(uv)|uv\in E(Q_n)\}$. Q_3是一个8阶图, 在不考虑同构的情况下完美匹配共有9种, 分别记这9种完美匹配为$F_1,F_2,\cdots,F_9$, 其中, 当$1\leq i\leq 3$时, $|\dim(F_i)|=1$, 当$4\leq i\leq 9$时, $|\dim(F_i)|=2$.

图G和图H的笛卡儿积图用$G\Box H$表示. 它的点集为$V(G\Box H)=V(G)\Box V(H)$. 设$(u_i,v_j),(u_k,v_l)\in V(G\Box H)$, 若$u_i=u_k$且$v_jv_l\in E(H)$, 或$u_iu_k\in E(G)$且$v_j=v_l$, 则$(u_i,v_j)(u_k,v_l)\in E(G\Box H)$. 本文中, 我们主要的研究对象是$Q_3\Box P_q$和$Q_3\Box C_q$. 为了更直观地理解, 我们可以把$Q_3\Box P_q$看作路$P_q=v_1v_2\cdots v_q$中每个顶点都用一个$Q_3$替换得到的图. 按照路从$v_1$到$v_q$的顺序记这些$Q_3$为$Q^1,Q^2,\cdots,Q^q$, 用$Q_3\Box P_q=Q^1Q^2\cdots Q^q$表示, $Q^i(1\leq i\leq q)$同构于Q_3. 令S为$Q_3\Box P_q$中所有Q_3的集合, $Q^i,Q^j\in S$, M为$Q_3\Box P_q$的完美匹配,

$$E(Q^i)=\{uv\in E(Q_3\Box P_q)|u,v\in V(Q^i)\},$$
$$E(Q^i,Q^j)=\{uv\in E(Q_3\Box P_q)|u\in V(Q^i),v\in V(Q^j)\},$$

$$M(Q^i)=\{uv\in M\,|\,u,v\in V(Q^i)\},$$
$$M(Q^i,Q^j)=\{uv\in M\,|\,u\in V(Q^i),v\in V(Q^j)\}.$$

$S'\subseteq S$, $M(S')=\{uv\in M\,|\,u,v\in V(S')\}$. 若$u\in V(Q^i),v\in V(Q^{i+1}),uv\in E(Q^i,Q^{i+1})$, 则称$u$是$v$在$Q^i$中的对应点, v是u在Q^{i+1}中的对应点. 若$uv\in E(Q^i),xy\in E(Q^{i+1})$, 且$u$与$x$对应, v与y对应, 则称uv是xy在Q^i中的对应边, xy是uv在Q^{i+1}中的对应边. 若对某个Q^i, $|M(Q^i)|=4$, 且$M(Q^i)$与$F_k\in\{F_1,\cdots,F_9\}$相同, 那么称Q^i的匹配类型为F_k, 记$M(Q^i)=F_k$.

2 一些性质及引理

定理 3[12] $K(Q_n)$中任意完美匹配可由Q_n中边扩充为哈密顿圈.

性质 1 在Q_3中, 有以下性质:

(1) M是Q_3的完美匹配, $e\in E(Q_3)\backslash M$. 若$|\dim(M)|=1$, 则存在一个包含M的哈密顿圈也包含e; 若$|\dim(M)|=2$, 则存在一条包含M的哈密顿路P_{uv}也包含e, 且u,v对立.

(2) M是Q_3的完美匹配, $|\dim(M)|=1$, $u,v\in V(Q_3)$对立, 则在Q_3中存在两条点不交的3路P_{ux},P_{vy}满足: $V(P_{ux})\cup V(P_{vy})=V(Q_3)$; $E(P_{ux})\cup E(P_{vy})\supseteq M$; x,y对立, $\{x,y\}\cap\{u,v\}=\varnothing$.

(3) $uv\in E(Q_3)$, M是$Q_3-\{u,v\}$的完美匹配, $|\dim(M)|=2$, 则在Q_3中: (i) 存在两条点不交的路P_{ux},P_{vy}满足: $V(P_{ux})\cup V(P_{vy})=V(Q_3)$; $E(P_{ux})\cup E(P_{vy})\supseteq M$; x,y对立, $\{x,y\}\cap\{u,v\}=\varnothing$. (ii) 存在一条以$u$或$v$为端点的路(不妨设为前者)$P_{ux}$满足: $V(P_{ux})=V(Q_3)\setminus\{v\}$; $E(P_{ux})\supseteq M$; x,v对立.

(4) $u,v\in V(Q_3)$, M是$Q_3-\{u,v\}$的完美匹配, $e\in E(Q_3)\setminus M$(当$uv\in E(Q_3)$时, $e\in E(Q_3)\setminus(M\cup\{uv\})$), 若边$uv\in E(Q_3)$且$|\dim(M)|=1$, 或$u,v$对立, 则存在$u,v$间一条7路$P_{uv}$满足: $V(P_{uv})=V(Q_3)$, $E(P_{uv})\supseteq e\cup M$.

引理 1 设M是$Q_3\square P_2=Q^1Q^2$的完美匹配且均在Q^1和Q^2中. 若$|\dim(M(Q^1))|\neq|\dim(M(Q^2))|$, 则对任意一对对立点$u,v\in V(Q^1)$, 存在两条点不交的路$P_{uu'},P_{vv'}$满足: $V(P_{uu'})\cup V(P_{vv'})=V(Q_3\square P_2)$; $E(P_{uu'})\cup E(P_{vv'})\supseteq M$; u',v'为u,v在Q^2中对应点.

证明 令$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$, 不妨设$|\dim(M(Q^1))|=2$, $|\dim(M(Q^2))|=1$. 在Q^1中任取一对对立点u,v, 设u',v'为u,v在Q^2中的对应点.

当$\dim(M(Q^1))\cap\dim(M(Q^2))\neq\varnothing$时, 不妨设$\dim(M(Q^1))=\{\alpha,\beta\}$, $\dim(M(Q^2))=\{\alpha\}$. 在u,v中有且仅有一点, 设为u, 存在边$ua\in M(Q^1)$且ua在Q^2中的对应边$u'a'\in M(Q^2)$, 即: $\dim(ua)=\{\alpha\}$, 此时令$P_{uu'}=uaa'u'$. 在Q^1中, 以u,v为端点且经过$M(Q^1)$的路只有一条, 令$P_{uv}=ua+ab+P_{bv}$, 其中, $ab\notin M(Q^1)$, 那么$\dim(ab)=\{\beta\}$. $\dim(E(P_{bv})\setminus(M(Q^1)\setminus\{ua\}))=\{\alpha,\gamma\}$, 取其中维度为$\alpha$的边记为$cd$, cd在Q^2中的对应边$c'd'\in M(Q^2)$. 此时$M(Q^2)$中除了$u'a'$和$c'd'$外, v'和b'分别属于不同的边, 则v'和b'间有一条包含剩余两条边的3路$P_{v'b'}$. 令$E(P_{vv'})=E(P_{vb})\cup E(P_{v'b'})\cup\{bb',c'd',cc',dd'\}\setminus\{cd\}$.

当$\dim(M(Q^1))\cap\dim(M(Q^2))=\varnothing$时, 不妨设$\dim(M(Q^1))=\{\alpha,\beta\}$, $\dim(M(Q^2))=\{\gamma\}$. 设$ua\in M(Q^1)$且$\dim(ua)=\{\alpha\}$, 取$M(Q^1)$中另一条维度为α的边记为cd, 令$P_{ud}=uacd$. 设$M(Q^1)=\{ua,cd,xy,vb\}$, 其中$d(x,v)=2$, $\{u,a,c,d,x,y,v,b\}$在$M(Q^2)$中的对应点为$\{u',a',c',d',x',y',v',b'\}$, 所以$\dim(ux)=\dim(u'x')=\dim(d'y')=\{\gamma\}$. 在$Q^2$中, v',b'间有一条3路$P_{v'b'}=v'c'a'b'$, 令$P_{vv'}=vb+bb'+P_{v'b'}$, $P_{uu'}=P_{ud}+dd'+d'y'+y'y+yx+xx'+x'u'$.

引理 2 设M是$Q_3\square P_q=Q^1Q^2\cdots Q^q$的完美匹配且均在$Q_3$中, $q\geq1$. 如果$|\dim(M(Q^i))|=1$, $1\leq i\leq q$, 那么对任意$u,v\in V(Q^1)$对立, $Q_3\square P_q$中都有两条点不交的路P_{ux},P_{vy}满足: $V(P_{ux})\cup V(P_{vy})=V(Q_3\square P_q)$; $E(P_{ux})\cup E(P_{vy})\supseteq M$; $x,y\in V(Q^q)$对立.

证明 我们将通过对q归纳进行证明. 设$u,v\in V(Q^1)$对立. $q=1$时结论显然成立. 假设结论对$q-1$成立, 下面证明结论对于q也是成立的. 根据归纳假设我们有: 在前$q-1$个Q_3中, 有两条点不交的路满足结论, 设为P_{uw}和P_{vt}, $w,t\in V(Q^{q-1})$对立. 令w,t在Q^q中的对应点为w',t', 那么在Q^q中存在两条3路设为$P_{w'x}$, $P_{t'y}$, 使$E(P_{w'x})\cup E(P_{t'y})\supseteq M(Q^q)$且$x,y$对立. 令$P_{ux}=P_{uw}+ww'+P_{w'x}$, $P_{vy}=P_{vt}+tt'+P_{t'y}$, 从而结论成立.

引理 3 设M是$Q_3\square P_3=Q^1Q^2Q^3$的完美匹配且均在Q_3中. 若$|\dim(M(Q^1))|=|\dim(M(Q^2))|=2$, $|\dim(M(Q^3))|=1$, 则对任意对立点$u,v\in V(Q^1)$, Q^1Q^2上存在包含$M(Q_1),M(Q_2)$的路P_{uv}, 满足: 存在$e\in(E(Q^2)\cap E(P_{uv}))\setminus M(Q^2)$, 使$e$在$Q^3$中的对应边不属于$M(Q^3)$.

证明 设$u,v\in Q^1$对立, 则存在Q^1中一条包含$M(Q^1)$的7路P'_{uv}. 令$E(P'_{uv})\setminus M(Q^1)=\{e_1,e_2,e_3\}$, 则有$\dim(e_1)$, $\dim(e_2)$和$\dim(e_3)$互不相等. 不妨设$\dim(e_2)\notin\dim(M(Q^2))$.

若e_1,e_3中至少有一条边在Q^2中的对应边属于$M(Q^2)$, 不妨设$e_1=ab$的对应边$e'=a'b'\in M(Q^2)$, 则有$\dim(e_1)=\dim(e')$. 在Q^2中, $M(Q^2)\setminus\{e'\}$可扩充为长度为6的圈, 记为C'. 令C'上不属于$M(Q^2)$的三条边分别为f_1,f_2,f_3. 设$\dim(f_1)=\dim(f_2)$且$\dim(f_1)\cap\dim(M(Q^2))=\varnothing$, $\dim(f_3)=\dim(e')$, 那么我们有e_2与f_1或f_2是对应边. 设$e_2=cd$与$f_1=c'd'$对应, 所求Q^1Q^2上的P_{uv}为: $E(P_{uv})=E(P'_{uv})\cup E(C')\cup\{e',aa',bb',cc',dd'\}\setminus\{e_1,e_2,f_1\}$.

若e_1,e_3在Q^2中的对应边都不属于$M(Q^2)$, 在Q^2中, $M(Q^2)$可扩充为两个长度为4的圈, 记为C^1,C^2. 令$(E(C^1)\cup E(C^2))\setminus M(Q^2)=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$. 不妨设$f_1,f_2\in E(C^1)$, $f_3,f_4\in E(C^2)$, 那么有$\dim(f_1)=\dim(f_2)\neq\dim(f_3)=\dim(f_4)$. 设$\dim(e_1)=\dim(f_1)$, $\dim(e_2)=\dim(f_3)$, 则e_1与f_1或f_2对应, e_2与f_4或f_3对应. 假设都为前者, 所求为$E(P_{uv})=E(P'_{uv})\cup E(C^1)\cup E(C^2)\cup\{aa',bb',cc',dd'\}\setminus\{e_1,e_2,f_1,f_4\}$.

注意在两种情况下都有$\dim(f_2)\neq\dim(f_3)$, 则必有f_2或f_3在Q^3中的对应边不属于$M(Q^3)$, 结论成立.

引理 4 $Q_3\Box P_2=Q^1Q^2$, $x,y\in V(Q^1)$对立, $uv\in E(Q^2)$, $M(Q^1)$是Q^1中完美匹配, $M(Q^2)$是$Q^2-\{u,v\}$中完美匹配. 若满足下列条件之一:

(1) $|\dim(M(Q^1))|=2$;

(2) $|\dim(M(Q^1))|=1$且$|\dim(M(Q^2))|=2$.

则在$Q_3\Box P_2$中存在两条点不交的路P_{ux},P_{vy}满足: $V(P_{ux})\cup V(P_{vy})=V(Q_3\Box P_2)$; $E(P_{ux})\cup E(P_{vy})\supseteq M(Q^1)\cup M(Q^2)$.

证明 当$|\dim(M(Q^1))|=2$时, 在Q^1中有一条包含$M(Q^1)$的7路记为P_{xy}. 令$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{1,2,3\}$. 不妨设$\dim(M(Q^1))=\{\alpha,\beta\}$. 若$|\dim(M(Q^2))|=1$, 则一定存在边$e=ab\in E(P_{xy})\setminus M(Q^1)$, 使$e$在$Q^2$中对应边$e'=a'b'\notin M(Q^2)\cup\{uv\}$, 根据性质1(1)可知$Q^2$中有一个包含$M(Q^2)\cup\{uv,e'\}$的哈密顿圈记为$C_1$, C_1删去边uv得到7路P_{uv}. 若$|\dim(M(Q^2))|=2$, 此时设$\dim(M(Q^2))=\{\alpha,\gamma\}$. $M(Q^2)\cup\{uv\}$可扩充为Q^2上8圈C_2, C_2删去边uv得到7路P_{uv}, 且$\dim(P_{uv}\setminus M(Q^2))=\{\beta\}$. 取$P_{xy}\setminus M(Q^1)$中$e=ab$, 满足$\dim(e)=\{\beta\}$, 那么$e$在$Q^2$中对应边$e'=a'b'\in P_{uv}\setminus M(Q^2)$. $\dim(M(Q^2))=\{\alpha,\beta\}$时同理. 在以上两种情况中, 不妨设$P_{xy}$上$a$在$x,b$之间, P_{uv}上a'在u,b'之间. 令$P_{xu}=P_{xa}+aa'+P_{a'u}$, $P_{yv}=P_{yb}+bb'+P_{b'v}$.

若$|\dim(M(Q^1))|=1$且$|\dim(M(Q^2))|=2$, 由性质1(2)可知, Q^1中有两条3路P_{xw}, P_{yt}, 且w,t对立, 令w,t在Q^2中对应点为w',t'. 当$\{w',t'\}\cap\{u,v\}\neq\varnothing$时, 不妨设$t'=v$, 则$v,w'$对立. 由性质1(3)可得, 在$Q^2$中有包含$M(Q^2)$的路$P_{w'u}$. 此时令$P_{xu}=P_{xw}+ww'+P_{w'u}$, $P_{yv}=P_{yt}+tt'+P_{t'v}$为所求. 当$\{w',t'\}\cap\{u,v\}=\varnothing$时, Q^2中存在两条路$P_{w'u}$, $P_{t'v}$, 此时令$P_{xu}=P_{xw}+ww'+P_{w'u}$, $P_{yv}=P_{yt}+tt'+P_{t'v}$.

3 $Q_3\Box P_q$中包含M的哈密顿圈构造

引理 5 设M是$Q_3\Box P_q=Q^1Q^2\cdots Q^q$的完美匹配, $q\geq 1$, $S=\{Q^1,Q^2,\cdots,Q^q\}$为$Q_3\Box P_q$中所有Q_3的集合. 若M中边均在Q_3中, 则M可扩充为哈密顿圈.

证明 定义$Q_3\Box P_q=Q^1Q^2\cdots Q^q$的匹配序列$F\in\{F^1F^2\cdots F^i\cdots F^q\mid 1\leq i\leq q,F^i\in\{F_1,F_2,\cdots,F_9\}\}$, $M(Q^i)=F^i$. 令$Q_3\Box P_q$中包含M的哈密顿圈为C.

情况 1 对任意$Q^i\in S$, $|\dim(M(Q^i))|=1$.

当$q=1$时结论显然成立. 假设结论对$q-1$是成立的, 下面我们证明结论对于q也是成立的. 根据归纳假设我们有: $Q_3\Box P_q$的前$q-1$个Q_3中有包含完美匹配的哈密顿圈, 记为C_1. 那么C_1中存在边$e=ab\in E(Q^{q-1})\setminus M(Q^{q-1})$, 使$e$在$Q^q$中的对应边$e'=a'b'\in E(Q^q)\setminus M(Q^q)$. 在$Q^q$中, 有一个包含$M(Q^q)\cup e'$的哈密顿圈$C_2$. 此时$E(C)=E(C_1)\cup E(C_2)\cup\{aa',bb'\}\setminus\{e,e'\}$为所求.

我们把这种Q^i以8圈的形式融入整体哈密顿圈的方式记为$8-cycle$方式. 类似的, 在后面的证明过程中, 还会出现$7-path$方式, $6-cycle$方式以及$4-cycle$方式.

情况 2 对任意$Q^i\in S$, $|\dim(M(Q^i))|=2$.

子情况 2.1 q为偶数.

令$q/2=j$, 对j进行归纳. 当$j=1$时, Q^1中存在一条包含$M(Q^1)$的7路P_{uv}, u,v对立. 令u,v在Q^2中对应点

为u',v', Q^2中包含$M(Q^2)$的7路记为$P_{u'v'}$. 此时容易求得$E(C)=E(P_{uv})\cup E(P_{u'v'})\cup\{uu',vv'\}$. 假设结论对$j-1$是成立的, 下面证明结论对$j$也是成立的. 根据归纳假设我们有: $Q_3\square P_q$的前$2q-2$个Q_3中有包含完美匹配的哈密顿圈记为C_1. 由于Q^{2q-2}以$7-path$方式融合进C_1, 那么$(E(C_1)\cap E(Q^{2q-2}))\setminus M(Q^{2q-2})$中一定存在$e=ab$, 其在$Q^{2q-1}$中的对应边$e'=a'b'\notin M(Q^{2q-1})$. 由性质1(1)可得, Q^{2q-1}中有一条包含$M(Q^{2q-1})$和e'的7路P_{wt}, w,t对立. 令w,t在Q^{2q}中的对应点为w',t', Q^{2q}中有一条包含$M(Q^{2q})$的7路$P_{w't'}$. 记$C_2=P_{wt}+ww'+tt'+P_{w't'}$. 此时$E(C)=E(C_1)\cup E(C_2)\cup\{aa',bb'\}\setminus\{e,e'\}$为所求.

子情况 2.2 q为奇数.

当$q=1$时, 结论成立. 当$q\geq 3$时, 根据子情况2.1可知, 在$Q^1Q^2\cdots Q^{q-3}$中存在包含完美匹配的哈密顿圈记为C_1, 且$(E(C_1)\cap E(Q^{q-3}))\setminus M(Q^{q-3})$中一定存在$e=ab$, 其在$Q^{q-2}$中的对应边$e'=a'b'\notin M(Q^{q-2})$, 在$Q^{q-2}$中存在包含$e'$和$M(Q^{q-2})$的7路$P_{uv}$, u,v对立. 令u,v在Q^{q-1}中对应点为u',v', 由引理3可知$Q^{q-1}Q^q$中存在包含$M(Q^{q-1})\cup M(Q^q)$的哈密顿路$P_{u'v'}$. 所求为$E(C)=E(C_1)\cup E(P_{uv})\cup E(P_{u'v'})\cup\{aa',bb'\}\setminus\{e,e'\}$.

情况 3 存在$Q^i,Q^j\in S$, $i\neq j$, $|\dim(M(Q^i))|\neq|\dim(M(Q^j))|$.

对于匹配序列F, 我们把单独出现的属于$\{F_4,F_5,\cdots,F_9\}$中的部分记为$seg1$, $|seg1|$表示这部分中Q_3的个数, $|seg1|=1$; 连续出现的偶数个属于$\{F_4,F_5,\cdots,F_9\}$中的部分记为$seg2$; 连续出现的奇数个属于$\{F_4,F_5,\cdots,F_9\}$中的部分记为$seg3$; 连续出现的属于$\{F_1,F_2,F_3\}$中的部分记为$seg4$. $seg1,seg2,seg3,seg4$都称为$segment$. 例如, $F=F_1F_4F_5F_2F_3F_1F_6F_2F_7F_8F_9F_3F_1F_2$是$Q_3\square P_{14}$的匹配序列, 可以分割化简为7个"片段"的序列: $F=seg4seg2seg4\,seg1seg4seg3seg4$. 令$F$中交替出现的$seg1,seg2,seg3,seg4$数目之和为$n$, $n\geq 2$.

当$n=2$时, 令$Q^1\cdots Q^i$中匹配序列为$seg4$, $Q^{i+1}\cdots Q^q$中匹配序列为F的第二个$segment$. 根据情况1, $Q^1\cdots Q^i$中有包含完美匹配的哈密顿圈C_1. 当$F=seg4seg1$时, 若$\dim(M(Q^i))\cap\dim(M(Q^q))\neq\varnothing$, 则存在$e=ab\in(E(C_1)\cap E(Q^i))\setminus M\ (Q^i)$, 使$e$在$Q^q$中对应边$e'=a'b'\notin M(Q^q)$. Q^q中有包含$M(Q^q)$和e'的8圈C_2. 反之, Q^q中有两个包含$M(Q^q)$的4圈记为C_3,C_4, 且$(E(C_1)\cap E(Q^i))\setminus M(Q^i)$中存在$e=ab,f=cd$, 使其在$Q^q$中对应边$e'=a'b',f'=c'd'$分别属于$E(C_3)$和$E(C_4)$且不属于$M(Q^q)$. 当$F=seg4seg2$, $F=seg4seg3$时, 存在$e=ab\in(E(C_1)\cap E(Q^i))\setminus M(Q^i)$, e在Q^{i+1}中对应边$e'=a'b'\notin M(Q^{i+1})$. 根据情况2, $Q^{i+1}\cdots Q^q$中存在包含完美匹配和e'的哈密顿圈C_2. 所求为$E(C)=E(C_1)\cup E(C_2)\cup\{aa',bb'\}\setminus\{e,e'\}$或$E(C)=E(C_1)\cup E(C_3)\cup E(C_4)\cup\{aa',bb',cc',dd'\}\setminus\{e,e',f,f'\}$.

在继续证明之前, 我们先证明两个结论: 设M是$Q_3\square P_q=Q^1Q^2\cdots Q^q$的完美匹配且边均在$Q_3$中, F为$Q_3\square P_q$的匹配序列, 令F中交替出现的$seg1,seg2,seg3,seg4$数量之和为n.

结论 1 若$n\geq 1$且F中$seg4$的数量大于等于$seg1,seg2,seg3$数量之和, 那么对任意的$u,v\in V(Q^1)$对立, $Q_3\square P_q$中存在两条点不交的路P_{ux},P_{vy}满足: $V(P_{ux})\cup V(P_{vy})=V(Q_3\square P_q)$; $E(P_{ux})\cup E(P_{vy})\supseteq M$; $x,y\in V(Q^q)$对立.

当$n=1$时结论显然成立. 当$n\geq 2$时, 不妨设F第一个$segment$为$seg4$. 若n为偶数, 令$n/2=j$, 对j进行归纳. 当$j=1$时, 记$Q^1\cdots Q^i$和$Q^{i+1}\cdots Q^q$中匹配序列分别为$seg4$和第二个$segment$. $F=seg4seg1$时, $Q^1\cdots Q^{i-1}$中存在两条包含完美匹配的路P_{uw}, P_{vt}, $w,t\in V(Q^{i-1})$对立. w',t'为其在Q^i中对应点, 根据引理1, Q^iQ^q中有$P_{w'x}$, $P_{t'y}$, $x,y\in V(Q^q)$对立. 所求为$P_{ux}=P_{uw}+ww'+P_{w'x}$, $P_{vy}=P_{vt}+tt'+P_{t'y}$. $F=seg4seg2$时, $Q^1\cdots Q^i$中存在两条包含完美匹配的路P_{uw}, P_{vt}, $w,t\in V(Q^i)$对立. w',t'为其在Q^{i+1}中对应点, 则Q^{i+1}中有包含$M(Q^{i+1})$的7路$P_{w't'}$, 其上有边$e=ab\notin M(Q^{i+1})$在Q^{i+2}中对应边$e'=a'b'\notin M(Q^{i+1})$. 根据情况2, $Q^{i+2}\cdots Q^q$中有包含完美匹配和e'的哈密顿路P_{xy}, $x,y\in V(Q^q)$对立. 不妨设$P_{w't'}$上a位于w'和b之间, P_{xy}上a位于x和b'之间, 所求为$P_{ux}=P_{uw}+ww'+P_{w'a}+aa'+P_{a'x}$, $P_{vy}=P_{vt}+tt'+P_{t'b}+bb'+P_{b'y}$. $F=seg4seg3$时, $Q^1\cdots Q^{i+1}$中构造过程与$F=seg4seg1$类似, $Q^{i+2}\cdots Q^q$中构造过程与$F=seg4seg2$中$Q^{i+1}\cdots Q^q$类似. 假设结论对$j-1$是成立的, 结论对于$j(j\geq 2)$也是成立的, 证明过程同引理2类似. 当n为奇数时, F可以看作n为偶数情况中匹配序列再补充$seg4$, 此时根据引理2, 结论显然也成立.

结论 2 若$n\geq 2$且F中第一个$segment$为$seg4$, 或$n=1$且$F\neq seg4$, 那么对任意的$u,v\in V(Q^1)$对立, $Q_3\square P_q$中存在包含M的哈密顿路P_{uv}.

当$n=1$时, 若$F=seg1$, 结论成立. 若$F=seg2$, $|seg2|=2$时结论可由引理3推出, $|seg2|\geq 4$时, Q^1中存在路P'_{uv}, 满足$E(P'_{uv})\setminus E(Q^1)$中有边$e_1=a_1b_1$在$Q^2$中对应边$e'_1=a'_1b'_1\in E(Q^2)\setminus M(Q^2)$. Q^2中有8圈C_1包含$\{e'\}\cup M(Q^2)$且$E(C_1)\setminus(M(Q^2)\cup\{e'\})$中有边$e_2=a_2b_2$在$Q^3$中对应边$e'_2=a'_2b'_2\notin M(Q^3)$. 根据情况2可知在$Q^3\cdots Q^q$中

有包含e_2'和完美匹配的哈密顿圈记为C_2. 所求为$E(P_{uv}) = E(P'_{uv}) \cup E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{a_1a_1', b_1b_1', a_2a_2', b_2b_2'\} \setminus \{e_1, e_1', e_2, e_2'\}$. 若$F = seg3$, Q^1中存在路P'_{uv}, 满足$E(P'_{uv}) \setminus E(Q^1)$中有边$e = ab$在$Q^2$中对应边$e' = a'b' \in E(Q^2) \setminus M(Q^2)$, 在$Q^2 \cdots Q^q$中有包含$e'$和完美匹配的哈密顿圈记为$C_1$. 所求为$E(P_{uv}) = E(P'_{uv}) \cup E(C_1) \cup \{aa', bb'\} \setminus \{e, e'\}$.

当$n \geq 2$时, 记F前$n-1$个$segment$对应的部分为$Q^1 \cdots Q^i$, 最后一个$segment$对应部分为$Q^{i+1} \cdots Q^q$. 若F最后一个$segment$不为$seg4$, 根据结论1, $Q^1 \cdots Q^i$中存在两条包含完美匹配的点不交的路记为P_{ux}, P_{vy}, $u, v \in V(Q^1)$对立, $x, y \in V(Q^i)$对立. 令x, y在Q^{i+1}中对应点为x', y', 由$n = 1$时结论成立可得, $Q^{i+1} \cdots Q^q$中存在包含完美匹配的哈密顿路$P_{x'y'}$. 所求为$P_{uv} = P_{ux} + xx' + P_{x'y'} + yy' + P_{vy}$. 若$F$最后一个$segment$为$seg4$, 可以看作前述情况中匹配序列再补充$seg4$, 不妨设$Q^1 \cdots Q^i$中完美匹配扩充的哈密顿路为$P'_{uv}$. 在构造过程中, 多数情况下$Q^i$中$M(Q^i)$是以$7-path$方式融合在$P'_{uv}$中, 个别为$6-cycle$方式或$4-cycle$方式. 不论以哪种方式融合, 总存在$e = ab \in (E(P'_{uv}) \cap E(Q^i)) \setminus M(Q^i)$在$Q^{i+1}$中对应边$e' = a'b' \notin M(Q^{i+1})$. 在$Q^{i+1} \cdots Q^q$中记包含$e'$和完美匹配的哈密顿圈为$C_1$. 此时, 所求可以通过融合$P'_{uv}, C_1$得到, $E(P_{uv}) = E(P'_{uv}) \cup E(C_1) \cup \{aa', bb'\} \setminus \{e, e'\}$.

我们继续引理5的证明. 当$n = 3$时, 记$Q^1 \cdots Q^i$, $Q^{i+1} \cdots Q^j$和$Q^{j+1} \cdots Q^q$的匹配序列依次对应三个$segment$. 若F中有两个$seg4$, 可以看作$n = 2$情况下匹配序列再补充$seg4$. 若F中仅一个$seg4$, 在$Q^1 \cdots Q^i$和$Q^{i+1} \cdots Q^q$中, 根据结论2分别存在两条包含完美匹配的哈密顿路$P_{uv}, P_{u'v'}$, $u, v \in V(Q^i)$对立, $u', v' \in V(Q^{i+1})$是u, v的对立点. 所求为$E(C) = E(P_{uv}) \cup E(P_{u'v'}) \cup \{uu', vv'\}$.

当$n \geq 4$时, 若F中$seg4$数量小于$seg1, seg2, seg3$数量之和, 令$Q^1 \cdots Q^i$, $Q^{j+1} \cdots Q^q$和$Q^{i+1} \cdots Q^j$的匹配序列依次对应F第一个, 最后两个以及其余的$segment$. 根据结论1和结论2, 我们分别有$Q^1 \cdots Q^i$中包含完美匹配的哈密顿路P_{uv}, $u, v \in V(Q^i)$对立, $Q^{i+1} \cdots Q^j$中两条点不交的路$P_{u'x}, P_{v'y}$, $x, y \in V(Q^j)$对立, $Q^{j+1} \cdots Q^q$中哈密顿路$P_{x'y'}$, $x', y' \in V(Q^{j+1})$对立. 其中, u', v'是u, v在Q^{i+1}中对应点, x', y'是x, y在Q^{j+1}中对应点. 所求为$E(C) = E(P_{uv}) \cup E(P_{u'x'}) \cup E(P_{v'y'}) \cup E(P_{x'y'}) \cup \{uu', vv', xx', yy'\}$. 若$F$中$seg4$的数量等于或大于$seg1, seg2, seg3$数量之和, 可以看作前述情况下匹配序列最后再补充$seg4$或匹配序列前后都补充$seg4$, 不再赘述.

至此引理5证明结束.

证明引理6之前, 我们先定义互连图(interconnection graph)$I(S, E)$, 以S为点集, E为边集. 其中S是$G = Q_n \Box P_q$(或$Q_n \Box C_q$)中所有Q_n的集合, E是连接两个Q_n的边的集合, $E = \{uv \in E(G) \,|\, u \in V(Q^i), v \in V(Q^{i+1})\}$.

引理 6 设M是$K(Q_n \Box P_q)$中完美匹配, $q, n \geq 2$, $S = \{Q^1, Q^2, \cdots, Q^q\}$. 如果任意$Q^i \in S$中都存在点被$M(Q^{i-1}, Q^i)$或$M(Q^i, Q^{i+1})$饱和, 则$M$可由$Q_n \Box P_q$中边扩充为哈密顿圈.

证明 对任意$Q^i \in S$, 总有$|V(M(Q^{i-1}, Q^i)) \cap V(Q^i)|$或$|V(M(Q^i, Q^{i+1})) \cap V(Q^i)|$为偶数. 我们将通过对$I(S, M)$连通分支数$\omega$进行归纳来证明结论. 当$\omega = 1$即$I(S, M)$连通时, 对$q$进行归纳. 当$q = 2$时, $Q_n \Box P_2$同构于$n+1$维超立方体Q_{n+1}, 结论显然成立. 假设结论对$q-1$成立, 下面证明结论对$q \geq 3$也成立. 取$I(S, M)$生成树的叶子节点Q^1, 令$S' = S \setminus \{Q^1\}$, $M(Q^1, Q^2) = \{u_kv_k \in M \,|\, u_k \in V(Q^1), v_k \in V(Q^2), 2 \leq k \leq 2^n - 2\}$. 在$S'$中, 令$M'$为$\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$形成的完美匹配, 那么$M(S') \cup M'$可由$E(S')$中边扩充为$K(S')$的一个哈密顿圈, 记为$C_1$. 在$C_1$中删去$M'$中边, 得到$k/2$条点不交的路, 不妨设这些路为$P_{v_1v_2}, \cdots, P_{v_{k-1}v_k}$. 在$Q^1$中, 令$M'' = \{u_1u_2, \cdots, u_{k-1}u_k\}$, $M'' \cup M(Q^1)$也可以由$E(Q^1)$中边扩充为$K(Q^1)$中哈密顿圈, 记为C_2. 在C_2中, 把边u_iu_{i+1}替换为路: $u_iv_i + P_{v_iv_{i+1}} + v_{i+1}u_{i+1}$, 从而把$C_2$扩充为$K(S)$上包含$M$的哈密顿圈$C$.

假设结论对$\omega - 1$成立, 当$\omega \geq 2$时, 按照顺序分别记这些连通分支为$S_1, S_2, \cdots, S_\omega$. 令$S'$为前$\omega - 1$个连通分支中$Q_3$的集合, $S' = \{Q^1, \cdots, Q^k\}$, $S_\omega = \{Q^{k+1}, \cdots, Q^q\}$, $V(M(Q^{k-1}, Q^k)) \cap V(Q^k) = \{x_1, \cdots, x_j\}$, $V(M(Q^{k+1}, Q^{k+2})) \cap V(Q^{k+1}) = \{y_1, \cdots, y_j\}$, $2 \leq i, j \leq 2^n$. 根据归纳假设我们有, $M(S')$可扩充为$K(S')$的哈密顿圈, 记为C_1, $M(S_\omega)$也可扩充为$K(S_\omega)$中哈密顿圈, 记为C_2. 观察$\omega = 1$时圈的构造过程, 我们可知Q^k为C_1的融合贡献了$i/2$条点不交的路, 且其端点集合为$\{x_1, \cdots, x_i\}$, 那么C_1删掉这些路, 得到了同样以$\{x_1, \cdots, x_i\}$为端点的$i/2$条点不交的路, 设这$i/2$条路为$P_{x_1x_2}, \cdots, P_{x_{i-1}x_i}$. 同理, 在$S_\omega$中, C_2删去Q^{k+1}中一些路也得到$j/2$条点不交的路, 其端点集合为$\{y_1, \cdots, y_j\}$, 设这$j/2$条路为$P_{y_1y_2}, \cdots, P_{y_{j-1}y_j}$. 在$Q^kQ^{k+1}$中, 令$M' = \{x_1x_2, \cdots, x_{i-1}x_i, y_1y_2, \cdots, y_{j-1}y_j\}$, $M' \cup M(Q^k) \cup M(Q^{k+1})$可由$Q^kQ^{k+1}$中边扩充为$K(Q^kQ^{k+1})$中哈密顿圈, 记为$C_3$. 在$C_3$上, 把边$x_nx_{n+1}$替换为路: $P_{x_nx_{n+1}}$, 把边y_my_{m+1}替换为路: $P_{y_my_{m+1}}$, 就得到了一个$K(Q_n \Box P_q)$上包含M的哈密顿圈C, 从而引理得证.

我们把$Q_3 \Box P_q = Q^1Q^2 \cdots Q^q$中所有$Q^i$按照是否有点被$M(Q^{i-1}, Q^i)$或$M(Q^i, Q^{i+1})$饱和, 分别表示为$block1$和

$block2$. 把连续出现的所有点都被Q_3中M的边饱和的部分记为$block1$, 把连续出现的有点被连接两个Q_3的M中边饱和的部分记为$block2$. 此时, $Q_3\Box P_q$可表示为$block1$和$block2$交替出现的序列.

引理 7 设M是$Q_3\Box P_q = Q^1Q^2\cdots Q^q$的完美匹配, $q \geq 3$, 若$Q_3\Box P_q$中至少各存在一个$block1$和$block2$, 且每个$block2$中第一个Q^i与最后一个Q^j分别被$M(Q^i,Q^{i+1})$和$M(Q^{j-1},Q^j)$饱和的点的数量均为2, 则M可扩充为哈密顿圈.

证明 假设$Q_3\Box P_q$中某个$block2 = Q^i\cdots Q^j$, 且$V(M(Q^i,Q^{i+1}))\cap V(Q^i) = \{u,v\}$, u,v在Q^{i+1}中对应点为u',v', $V(M(Q^{j-1},Q^j))\cap V(Q^j) = \{x,y\}$, x,y在Q^{j-1}中对应点为x',y'. 根据引理6可知, 在$Q^{i+1}\cdots Q^{j-1}$中, $\{u'v',x'y'\}\cup M(Q^{i+1}\cdots Q^{j-1})$可扩充为$K(Q^{i+1}\cdots Q^{j-1})$中的哈密顿圈, 记为$C_1$. 在$Q^i$和$Q^j$中分别有包含$M(Q^i)\cup\{uv\}$和$M(Q^j)\cup\{xy\}$的8圈$C_2,C_3$. C_2删去边uv得到的路记为P_{uv}, C_3删去边xy得到的路记为P_{xy}. 此时我们构造了$Q^i\cdots Q^j$上包含完美匹配的哈密顿圈C, $E(C) = E(C_1)\cup E(P_{uv})\cup E(P_{xy})\cup\{uu',vv',xx',yy'\}\setminus\{uv,u'v',xy,x'y'\}$. 从构造过程中可以观察到, 在$Q^i$和$Q^j$中以何种方式得到包含$M(Q^i)$和$M(Q^j)$的路$P_{uv}$, P_{xy}并不影响$Q^{i+1}\cdots Q^{j-1}$中形成的C_1, P_{uv}和P_{xy}之间也并不互相影响.

令$Q_3\Box P_q$中$block$的个数为n. 我们通过对n归纳证明本引理. 设$Q_3\Box P_q$中包含M的哈密顿圈为C. 当$n = 2$时, 设$Q_3\Box P_q = block2block1$. 令$Q^1\cdots Q^k$为$block2$, $Q^{k+1}\cdots Q^q$为$block1$, $V(M(Q^{k-1},Q^k))\cap V(Q^k) = \{u,v\}$, $M(Q^1\cdots Q^k)$和$M(Q^{k+1}\cdots Q^q)$分别在$Q^1Q^2\cdots Q^k$和$Q^{k+1}\cdots Q^q$中扩充的哈密顿圈为C_1, C_2, 根据构造过程我们可知, Q^k为C_1贡献了包含$M(Q^k)$的7路P_{uv}, Q^{k+1}以$8-cycle$, $6-cycle$, $4-cycle$或$7-path$的方式融入C_2. 令C_1删掉P_{uv}后得到的路为P'_{uv}.

若u,v是Q^k中对立点, 或$uv\in E(Q^k)$且$|\dim(M(Q^k))| = 1$, 根据性质1(4), Q^k中有一条不同于P_{uv}且包含$M(Q^k)$的路P''_{uv}, 其上存在边$e = ab\notin M(Q^k)$在Q^{k+1}中的对应边$e' = a'b'\in(E(C_2)\cap E(Q^{k+1}))\setminus M(Q^{k+1})$. 所求为$E(C) = E(P'_{uv})\cup E(P''_{uv})\cup E(C_2)\cup\{aa',bb'\}\setminus\{e,e'\}$. 因此设$uv\in E(Q^k)$, $|\dim(M(Q^k))| = 2$. 如果Q^{k+1}以$7-path$方式融入C_2, 那么一定存在某边$e = ab\in E(P_{uv})\setminus M(Q^k)$在$Q^{k+1}$中的对应边$e' = a'b'\in(E(C_2)\cap E(Q^{k+1}))\setminus M(Q^{k+1})$, 可以通过$e,e'$融合$C_1,C_2$得到$C$. 所以我们只用考虑$Q^{k+1}$以$8-cycle$, $6-cycle$或$4-cycle$方式融入C_2的情况, 此时$block1$的匹配序列F有五种, 分别为: $seg4$, $seg4\cdots$, $seg1seg4$, $seg3seg4$, $seg2\cdots$且$|seg2| = 2$.

$F = seg4$时, 若在Q^k中, $M(Q^k)\cup\{uv\}$可以以$4-cycle$方式融入C_2中, 设这两个圈为C_3和C_4, 即有$e = ab\in E(C_3)\setminus M(Q^k)$, $f = cd\in E(C_4)\setminus M(Q^k)$, 其在$Q^{k+1}$中对应边$e' = a'b', f' = c'd'\in(E(C_2)\cap E(Q^{k+1}))\setminus M(Q^{k+1})$. 所求为$E(C) = E(P'_{uv})\cup E(C_3)\cup E(C_4)\cup E(C_2)\cup\{aa',bb',cc',dd'\}\setminus\{e,e',f,f',uv\}$. 反之, 总可以调整$Q^{k+1}$融入$C_2$的8圈使$M(Q^k)\cup\{uv\}$可以以$4-cycle$方式融入新的$C_2$中. 根据性质1(3)可知, 在$Q^k$中存在包含$M(Q^k)$的$P_{ux}, P_{vy}$, x,y对立. 记x,y在Q^{k+1}中对应点为x',y', 令$P_{xy} = P'_{uv}+P_{ux}+P_{vy}$. $F = seg4\cdots$或$seg3seg4$时, 根据结论2可知$Q^{k+1}\cdots Q^q$中有包含完美匹配的哈密顿路$P_{x'y'}$. 所求为$E(C) = E(P_{xy})\cup E(P_{x'y'})\cup\{xx',yy'\}$. $F = seg1seg4$时, 在Q^{k+1}中存在7路$P_{x'y'}$, 满足$P_{x'y'}\setminus M(Q^{k+1})$上有边$e = ab$, 其在$Q^{k+2}$中对应边$e' = a'b'\notin M(Q^{k+2})$. 在$Q^{k+2}\cdots Q^q$中令包含完美匹配和$e'$的哈密顿圈为$C_3$. 所求为$E(C) = E(P_{xy})\cup E(P_{x'y'})\cup E(C_3)\cup\{xx',yy',aa',bb'\}\setminus\{e,e'\}$. $F = seg2seg4\cdots$且$|seg2| = 2$时, 在Q^{k+1}中存在7路$P_{x'y'}$, 满足$P_{x'y'}\setminus M(Q^{k+1})$上有边$e = ab$, 其在$Q^{k+2}$中对应边$e' = a'b'\in E(Q^{k+2})\setminus M(Q^{k+2})$. 那么在$Q^{k+2}$中有一条包含$M(Q^{k+2})$和$e'$的7路$P_{wt}$, w,t对立. w',t'是w,t在Q^{k+3}中对应点, 根据结论2, $Q^{k+3}\cdots Q^q$中存在包含完美匹配的哈密顿路$P_{w't'}$. 所求为$E(C) = E(P_{xy})\cup E(P_{x'y'})\cup E(P_{wt})\cup E(P_{w't'})\cup\{xx',yy',aa',bb',ww',tt'\}\setminus\{e,e'\}$. $F = seg2seg4$且$|seg2| = 2$时, 在Q^kQ^{k+1}中, 根据引理4, 存在两条包含完美匹配的点不交的路, 设为P_{uw},P_{vt}, $w,t\in V(Q^{k+1})$对立. w',t'是w,t在Q^{k+2}中对应点, 那么Q^{k+2}中存在7路$P_{w't'}$, 满足其上有边$e = ab\notin M(Q^{k+2})$, 且e在Q^{k+3}中对应边$e' = a'b'\notin M(Q^{k+3})$. 在$Q^{k+3}\cdots Q^q$中根据引理5可知, 存在包含完美匹配和$e'$的哈密顿圈$C_3$. 所求为$E(C) = E(P'_{uv})\cup E(P_{uw})\cup E(P_{vt})\cup E(P_{w't'})\cup E(C_3)\cup\{aa',bb',ww',tt'\}\setminus\{e,e'\}$.

假设结论对$n-1$成立, 下面证明结论对n也成立. 令$Q_3\Box P_q = Q^1Q^2\cdots Q^q$前$n-2$个$block$为$Q^1Q^2\cdots Q^i$, 第$n-1$个$block$为$Q^{i+1}\cdots Q^k$, 第$n$个$block$为$Q^{k+1}\cdots Q^q$. 根据归纳假设, 不妨设前$n-1$个$block$中完美匹配扩充的哈密顿圈为$C_1$, 第$n$个$block$中完美匹配扩充的哈密顿圈为$C_2$. 若第$n-1$个为$block2$, 此时构造方法与$n = 2$时一致. 以下讨论第$n-1$个为$block1$的情况. 在第$n-1$个$block1$中, 最后一个$Q_3$融入$C_1$的方式有$8-cycle$, $6-cycle$, $4-cycle$以及$7-path$方式. 设$V(M(Q^{k+1},Q^{k+2}))\cap V(Q^{k+1}) = \{u,v\}$, Q^{k+1}以7路P_{uv}融合在C_2, 令C_2删去P_{uv}得到的另一条以u,v为端点的路为P'_{uv}. 与$n = 2$时情况类似, 设$uv\in E(Q^{k+1})$且$|\dim(M(Q^{k+1}))| = 2$, 考虑Q^k以$4-cycle$或$6-cycle$或$8-$

$cycle$方式融入C_1的情况, 此时$block1$的匹配序列F有五种情况, 分别为: $seg4$, $\cdots seg4$, $seg4seg1$, $seg4seg3$, $\cdots seg2$且$|seg2| = 2$.

令$V(M(Q^{i-1},Q^i)) \cap V(Q^i) = \{x,y\}$. 在$C_1$中删去$Q^i \cdots Q^k$中边得到一个以$x,y$为端点的路$P'_{xy}$. 第$n$–1个$block$联合第$n$个$block$中完美匹配是可以扩充为哈密顿圈的, 记为$C'_2$. 如果$x,y$对立, 或$xy \in E(Q^k)$且$|\dim(M(Q^k))| = 1$, 那么总存在$Q^i$中一条包含$M(Q^i)$的7路, 记为$P''_{xy}$, 使$E\left(P''_{xy}\right) \setminus M(Q^i)$上有边$e = cd$在$Q^{i+1}$中对应边$e' = c'd' \in E(C'_2) \cap E(Q^{i+1}) \setminus M(Q^{i+1})$. 所求为$E(C) = E\left(P'_{xy}\right) \cup E\left(P''_{xy}\right) \cup E(C'_2) \cup \{cc', dd'\} \setminus \{e, e'\}$. 因此不妨设$xy \in E(Q^i)$, $|\dim(M(Q^i))| = 2$. 根据性质1(3)可知, 在Q^i,Q^{k+1}中各有两条点不交的路分别为P_{xw}, P_{yt}和P_{ur}, P_{vz}, $w,t \in V(Q^i)$对立, r,z对立. 令w',t'为w,t在Q^{i+1}中对应点, r',z'为r,z在Q^k中对应点. 如果我们能构造出$Q^{i+1} \cdots Q^k$, 即$block1$中两条包含完美匹配的点不交的路$P_{w'r'}$,$P_{t'z'}$, 此时所求为$E(C) = E\left(P'_{xy}\right) \cup E(P_{xw}) \cup E(P_{yt}) \cup E(P_{w'r'}) \cup E(P_{t'z'}) \cup E(P_{ru}) \cup E(P_{zv}) \cup E(P'_{uv}) \cup \{ww', tt', rr', zz'\}$. 当$F = seg4$或$\cdots seg4$或$seg4seg1$或$seg4seg3$时, 根据结论1, 容易得出结论成立. $F = \cdots seg2$时, 根据结论1, $Q^{i+1} \cdots Q^{k-2}$中有两条包含完美匹配的路, 设为$P_{w'g}$,$P_{t'l}$, $g,l \in V(Q^{k-2})$对立, 其在Q^{k-1}中对应点为g',l'. 那么在Q^{k-1}中有7路$P_{g'l'}$满足其中有边$e = ab \notin M(Q^{k-1})$, 且e在Q^k中对应边$e' = a'b' \notin M(Q^k)$, 则Q^k中有包含e'和$M(Q^k)$的7路$P_{r'z'}$. 不妨设$P_{g'l'}$上a位于g'和b之间, $P_{r'z'}$上a'位于r'和z'之间, 令$P_{w'r'} = P_{w'g} + gg' + P_{g'a} + aa' + P_{a'r'}$, $P_{t'z'} = P_{t'l} + ll' + P_{l'b} + bb' + P_{b'z'}$.

至此引理7证明结束.

定理2的证明 可由引理5∼7推得.

4　$Q_3 \square C_q$中包含M的哈密顿圈构造

定理1的证明 在定理1的证明过程中, 我们只需考虑$Q_3 \square C_q$中特有的不同于$Q_3 \square P_q$的完美匹配的情况. 当$Q_3 \square C_q$中M满足第一、三个条件时, 结论可以通过引理5和引理7推得. 在条件二的证明过程中, 我们主要讨论连接两个相邻Q_3的M中边数的奇偶性. $Q_3 \square C_q$中, 两个相邻Q_3间M中的边数可以为奇数, 但和另外两个相邻Q_3间M中的边数为偶数的情况不会同时存在. 设在$Q_3 \square C_q$中对$Q^i \in S$, $1 \le i \le q$都有:

情况 1 $M(Q^i,Q^{i+1})$或$M(Q^{i-1},Q^i)$的大小是奇数($i-1$, $i+1$对q取模).

在此情况下, 我们有$Q^i \in S$, $|M(Q^i,Q^{i+1})| \neq 0$, 且为奇数. 我们将通过对q进行归纳来证明结论. 当$q = 2$时, $Q_3 \square C_2$同构于四维超立方体Q_4, 结论显然成立. 假设结论对$q-1$成立, 下面证明结论对$q \ge 3$也成立. 取$Q^1 \in S$, 令$S' = S \setminus \{Q^1\}$,

$$M(Q^1,Q^2) = \{u_k u'_k \,|\, u_k \in V(Q^i), u'_k \in V(Q^{i+1}), 1 \le k \le 7\},$$
$$M(Q^1,Q^q) = \left\{v_j v'_j \,|\, v_j \in V(Q^i), v'_j \in V(Q^{i-1}), 1 \le j \le 7\right\}.$$

令M'为点集$\left\{u'_1, \cdots, u'_k, v'_1, \cdots, v'_j\right\}$形成的完美匹配, 根据归纳假设, S'中$M(S') \cup M'$可以扩充为$K(S')$中哈密顿圈. 令$M(S') \cup M'$扩充形成的哈密顿圈为C_2. 在C_2上删掉M'中边得到$(k+j)/2$条点不交的路, 不妨设这些路的集合为$P' = \left\{P_{u'_1u'_2}, \cdots, P_{u'_{k-2}u'_{k-1}}, P_{u'_kv'_1}, P_{v'_1v'_2}, \cdots, P_{v'_{j-1}v'_j}\right\}$. 令$M'' = \{u_1u_2, \cdots, u_{k-2}u_{k-1}, u_kv_1, v_2v_3, \cdots, v_{j-1}v_j\}$, $M'' \cup M(Q^i)$可以扩充为$K(Q^i)$中的哈密顿圈, 记为C_1. 在C_1中, 我们把边u_mu_{m+1}替换为路$u_mu'_m + P_{u'_mu'_{m+1}} + u'_{m+1}u_{m+1}$, 把边$v_nv_{n+1}$替换为路$v_nv'_n + P_{v'_nv'_{n+1}} + v'_{n+1}v_{n+1}$, $1 \le m \le k-2, 1 \le n \le j-1$, 把边$u_kv_1$替换为路$u_ku'_k + P_{u'_kv'_1} + v'_1v_1$, 得到了$Q_3 \square C_q$中包含$M$的哈密顿圈.

情况 2 $M(Q^i,Q^{i+1})$或$M(Q^{i-1},Q^i)$的大小是偶数($i-1$, $i+1$对q取模).

若至少存在一对相邻的Q^i,Q^{i+1}有$|M(Q^i,Q^{i+1})| = 0$, 此时在$Q_3 \square C_q$中删去$E(Q^i,Q^{i+1})$中边, 得到了同构于$Q_3 \square P_q = Q^{i+1} \cdots Q^1Q^2 \cdots Q^i$的图, 根据引理6, M可扩充为$Q_3 \square C_q$中哈密顿圈. 因此我们假设任意$Q^i \in S$, $|M(Q^i,Q^{i+1})| \neq 0$. 这种情况下哈密顿圈的构造过程与情况1类似, 不再赘述.

从而定理成立.

5　结束语

本文主要研究三维超立方体与圈的笛卡儿积图$Q_3 \square C_q$中完美匹配M可扩充为哈密顿圈的充分条件. 先研究了$Q_3 \square P_q$中完美匹配M可扩充为哈密顿圈的充分条件, 并给出了每个条件下圈的构造过程, 再研究了属于$Q_3 \square C_q$但不属于$Q_3 \square P_q$中的特殊情况, 最终得出结论. 对于普遍情况下$Q_3 \square C_q$和$Q_3 \square P_q$中完美匹配M是否可以扩充为

哈密顿圈, 后续我们将会进一步研究.

参考文献:

[1] CAHA R, KOUBEK V. Hamiltonian cycles and paths with a prescribed set of edges in hypercubes and dense sets[J]. Journal of Graph Theory, 2006, 51(2): 137-169.

[2] DVORÁK T. Hamiltonian cycles with prescribed edges in hypercubes[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2005, 19(1): 135-144.

[3] DIMITROV D, DVOŘÁK T, GREGOR P, et al. Gray codes avoiding matchings[J]. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, 2009, 11(2): 123-147.

[4] LIU J J, WANG Y L. Hamiltonian cycles in hypercubes with faulty edges[J]. Information Sciences, 2014, 256: 225-233.

[5] RUSKEY F, SAVAGE C. Hamilton cycles that extend transposition matchings in Cayley graphs of S_n[J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1993, 6(1): 152-166.

[6] ZULKOSKI E, GANESH V, CZARNECKI K. MathCheck: A math assistant via a combination of computer algebra systems and SAT solvers[C]//FELTYA P, MIDDELDORP A. International Conference on Automated Deduction. Cham: Springer, 2015: 607-622.

[7] WANG F, ZHAO W S. Matchings extend to Hamiltonian cycles in 5-cube[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2018, 38(1): 217-231.

[8] CHEN Y C, LI K L. Matchings extend to perfect matchings on hypercube networks[C]//Proceedings of the International Multi-Conference of Engineers and Computer Scientists, Hong Kong: IMECS, 2010.

[9] WANG F, ZHANG H P. Small matchings extend to Hamiltonian cycles in hypercubes[J]. Graphs and Combinatorics, 2016, 32(1): 363-376.

[10] DVOŘÁK T, FINK J. Gray codes extending quadratic matchings[J]. Journal of Graph Theory, 2019, 90(2): 123-136.

[11] KREWERAS G. Matchings and Hamiltonian cycles on hypercubes[J]. Bulletin of the Institute of Combinatorics and Its Applications, 1996, 16: 87-91.

[12] FINK J. Perfect matchings extend to Hamilton cycles in hypercubes[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2007, 97(6): 1074-1076.

[13] ALAHMADI A, ALDRED R E L, ALKENANI A, et al. Extending a perfect matching to a Hamiltonian cycle[J]. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, 2015, 17(1): 241-254.

[14] GAUCI J B, ZERAFA J P. Perfect matchings and hamiltonicity in the Cartesian product of cycles[J]. Annals of Combinatorics, 2021, 25(3): 789-796.

[15] GAUCI J B, ZERAFA J P. Accordion graphs: Hamiltonicity, matchings and isomorphism with quartic circulants[J]. Discrete Applied Mathematics, 2022, 321: 126-137.

责任编辑: 赵新科