加权概率区间值犹豫模糊集及决策应用*

朱国成[1], 胡 伟[2], 张 娟[1]

(1. 广东创新科技职业学院 通识教育学院，广东 东莞 523960；2. 广州科技贸易职业学院 经济管理学院，广东 广州 511442)

摘 要： 对概率区间值犹豫模糊集中的不同区间值隶属度赋予了决策专家权重, 定义了加权概率区间值犹豫模糊集（WPIVHFS）. 针对 WPIVHFS 中的加权概率区间值犹豫模糊数, 采用区间值隶属度的中位数、区间值隶属度的清晰度、概率以及相对应的决策专家权重构成四维点坐标进行刻画, 在此基础上建立了加权概率区间值犹豫模糊元（WPIVHFE）的外部固定函数模型、内部稳定函数模型、2 个 WPIVHFE 的大小比较准则与距离测度模型. 利用熵值法分别计算属性的外部权重与内部权重, 并依据属性的外部权重与内部权重相离程度值来确定属性的综合权重. 考虑方案的外部固定函数值、内部稳定函数值来计算各个方案的综合属性值. 方案的排序结果表明: 在采用四维点坐标来描述 WPIVHFS 的基础上建立的决策算法不但科学有效, 而且提供了一种多角度观察方案排序结果的方法.

关键词： 加权概率区间值犹豫模糊集; 四维点坐标; 加权概率区间值犹豫模糊元; 外部固定函数模型; 内部稳定函数模型; 熵值法

DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.02.23.0001

中图分类号： O159 **文献标识码：** A **文章编号：** 2096-7675(2023)05-0582-09

引文格式： 朱国成, 胡伟, 张娟. 加权概率区间值犹豫模糊集及决策应用[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(5): 582-590.

英文引文格式： ZHU Guocheng, HU Wei, ZHANG Juan. Weighted probabilistic interval valued hesitant fuzzy sets and decision applications[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(5): 582-590.

Weighted Probabilistic Interval Valued Hesitant Fuzzy Sets and Decision Applications

ZHU Guocheng[1], HU Wei[2], ZHANG Juan[1]

(*1. School of General Education, Guangdong Innovative Technical College, Dongguan Guangdong 523960, China; 2. School of Business Administration, Guangzhou Vocational University of Science and Technology, Guangzhou Guangdong 511442, China*)

Abstract： The weighted probabilistic interval valued hesitant fuzzy set (WPIVHFS) is defined by assigning the weight of expert to the different interval valued membership degrees of the probabilistic interval valued hesitant fuzzy set. Aiming at the weighted probabilistic interval valued hesitant fuzzy number in WPIVHFS, the four-dimensional point coordinates composed of the median of interval valued membership degree, the clarity of interval valued membership degree, the probabilistic interval valued membership degree and the corresponding decision-making expert weight are used to describe. On this basis, the external fixed function model, internal stability function model, two WPIVHFEs' size comparison criteria and distance measure model are established. The entropy method is used to calculate the external weight and internal weight respectively, and the comprehensive weight of the attribute is determined according to the degree of separation between the external weight and internal weight of the attribute. Considering the external fixed function value and the internal stable function value, the comprehensive attribute value of each scheme is calculated. The results of the scheme show that the decision algorithm established on the basis of using four-dimensional point coordinates to describe WPIVHFS is not only scientific and effective, but also provides a method to observe the scheme ranking results from multiple angles.

Key words： weighted probabilistic interval valued hesitant fuzzy set; four-dimensional point coordinate; weighted probabilistic interval valued hesitant fuzzy element; external fixed function model; within the partial stability function model; entropy method

* **收稿日期：** 2023-02-23

基金项目： 广东创新科技职业学院特色创新类重点项目“基于犹豫模糊集的决策模型及应用”（2023TSZD05）.

作者简介： 朱国成（1986-），男，硕士，讲师，从事模糊信息决策与最优化方向的研究，E-mail: 569141518@qq.com.

0　引 言

在不确定信息环境下的多属性群决策问题中, 决策者在使用精确数据信息描述自己认知心理时, 不能完整、客观与全面地反映决策对象的真实情况, 因此, 相较于具体数值构成的经典集合, 模糊集能够更好地处理多属性群决策问题[1]. 由于人们掌握知识水平的局限性以及表达信息方式的多样性, 于是学者们给出了模糊集的各种拓展形式, 如: 语言术语集[2]、区间模糊集[3]、直觉模糊集[4]、区间直觉模糊集[5]等经典模糊集. 但经典模糊集中仅使用一个隶属度值来刻画决策信息, 不能很好地解决人们对同一问题见解多样性导致的模糊性问题[6]. 为此, Torra[7]给出了模糊集的另一种拓展形式, 即犹豫模糊集. 犹豫模糊集中的单位元称之为犹豫模糊元, 其是由若干个不同的隶属度值构成的集合. 随后许多学者相继研究了犹豫模糊集的相似度[8]、熵[9]、相关系数[10]、包含度[11]、α-截集[12]等. 文献 [13-15] 还分别研究了犹豫模糊集在聚类分析、多属性决策以及数学表达式检索结果相关排序问题中的应用等. 随着犹豫模糊集在群决策问题中的深入应用, 其自身存在的局限性开始凸显: 在犹豫模糊集中默认所有的隶属度值出现的概率相等, 没有考虑决策者对于各个隶属度值的偏好问题, 因而容易损失决策信息. 为了有效弥补这一不足, Zhang 等[16]给出了概率犹豫模糊集的概念 (不同的隶属度值发生的可能性用概率表示). 由于在概率犹豫模糊环境下的群决策案例中, 不同的决策者喜欢使用不同类型的隶属度值参与测评, 继而 Pang 等[17]定义了概率语言术语集, He 等[18]定义了概率区间值犹豫模糊集 (Probabilistic Interval Valued Hesitant Fuzzy Set, PIVHFS).

针对概率区间值犹豫模糊集多属性群决策问题的研究, 王金凤等[19]建立了基于关联系数的概率区间值犹豫模糊集群决策模型; 陈惠琴等[20]给出了满足封闭性的概率区间值运算公式, 并提出了概率区间值犹豫模糊集的加权平均算子与加权几何算子; 周小领等[21]提出了一系列概率区间犹豫模糊信息集成算子; 朱国成[22]将决策专家的权重注入概率区间值犹豫模糊集中, 定义了加权概率区间值犹豫模糊集 (Weighted Probabilistic Interval Valued Hesitant Fuzzy Set, WPIVHFS), 并在 WPIVHFS 刻画决策信息的基础上建立多属性群决策模型.

目前, 关于概率区间值犹豫模糊集多属性群决策问题的研究皆在概率区间犹豫模糊情境下来建立决策算法, 实现对概率区间值犹豫模糊集的应用目的. 同时在对方案排序时, 一般做法是直接对决策专家组给出的方案评审信息进行集结以获取各方案的综合属性值, 并根据各方案的综合属性值大小达到排序方案目的. 由于上述研究中不但在原始的评审信息中没有考虑决策专家的重要性, 而且也没有兼顾决策专家组内部成员之间给予方案的评价信息差异程度值, 因而容易造成与实际情况不符的排序结果.

鉴于以上分析, 本文针对 WPIVHFS 多属性群决策问题, 首先, 给出了区间值隶属度的中位数、区间值隶属度的清晰度定义, 并采用四维点坐标来刻画 WPIVHFS, 从维度的角度出发来研究 WPIVHFS. 其次, 在采取四维点坐标刻画 WPIVHFS 的基础上, 建立了计算加权概率区间值犹豫模糊元 (Weighted Probabilistic Interval Valued Hesitant Fuzzy Element, WPIVHFE) 的外部固定函数值模型与内部稳定函数值模型、2 个 WPIVHFE 的大小比较规则以及距离测度模型. 再次, 考虑方案的外部固定函数值 (评审专家组给予该方案的评分值) 与内部稳定函数值 (评审专家组成员之间关于方案的评价信息差异程度值) 来计算方案的综合属性值. 最后, 通过一个数值算例来分析文中理论与方法的可行性.

1　预备知识

定义 1[18] 针对非空集合 X, X 上的一个 PIVHFS 定义为: $H_p=\{<x,h_x(p_x)\mid x\in X>\}$, h_x 表示元素 $x\in X$ 的区间值隶属度且有 $h_x\subset[0,1]$, p_x 为 h_x 相对应的概率, 同时称 $h_x(p_x)$ 为 PIVHFE.

为方便起见, $h_x(p_x)$ 用 $h(p)$ 表示, 其中元素 h_x 用 $\gamma_l=[\gamma_l^u,\gamma_l^v]$ 表示, PIVHFE $h(p)=\{\gamma_l=[\gamma_l^u,\gamma_l^v]p_l\mid\gamma_l\subset[0,1];l=1,2,\cdots,\sharp h(p);\sum\limits_{l=1}^{\sharp h(p)}p_l=1\}$, $\sharp h(p)$ 指 $h(p)$ 中区间值隶属度的个数.

定义 2[21] PIVHFE $h(p)=\{\gamma_l=[\gamma_l^u,\gamma_l^v]p_l\mid\gamma_l\subset[0,1];l=1,2,\cdots,\sharp h(p);\ \sum\limits_{l=1}^{\sharp h(p)}p_l=1\}$, 定义 $\triangle(h)=(\sum\limits_{l=1}^{\sharp h(p)}(\gamma_l^u+\gamma_l^v)p_l)/2$ 与 $\nabla(h)=\sum\limits_{l=1}^{\sharp h(p)}[0.5(\gamma_l^u+\gamma_l^v)-\triangle(h)]^2p_l$ 分别为其得分函数与偏差函数.

定义 3[21] 给定 2 个 PIVHFE $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$,

$$h_1(p_1)=\{\gamma_1=[\gamma_{1i}^l,\gamma_{1i}^u]p_{1i}\mid\gamma_1\subset[0,1];i=1,2,\cdots,\sharp h_1(p_1);\ \sum_{i=1}^{\sharp h_1(p_1)}p_{1i}=1\},$$

$$h_2(p_2)=\{\gamma_2=[\gamma_{2j}^l,\gamma_{2j}^u]p_{2j}\mid\gamma_2\subset[0,1];j=1,2,\cdots,\sharp h_2(p_2);\ \sum_{j=1}^{\sharp h_2(p_2)}p_{2j}=1\},$$

则 PIVHFE $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$ 的大小比较规则为:

(i) 若 $\triangle(h_1(p_1))>\triangle(h_2(p_2))$, 则有 $h_1(p_1)>h_2(p_2)$;

(ii) 若 $\triangle(h_1(p_1))=\triangle(h_2(p_2))$, 则分三种情况:

(a) 当 $\nabla(h_1(p_1))>\nabla(h_2(p_2))$ 时, 有 $h_1(p_1)<h_2(p_2)$;

(b) 当 $\nabla(h_1(p_1))<\nabla(h_2(p_2))$ 时, 有 $h_1(p_1)>h_2(p_2)$;

(c) 当 $\nabla(h_1(p_1))=\nabla(h_2(p_2))$ 时, 有 $h_1(p_1)=h_2(p_2)$.

定义 4[23] 对于任意 2 个元素数目相等的 PHFE $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$, 二者距离测度 d 需要满足以下 3 个公理性条件:

(i) 非负性, $d(h_1(p_1),h_2(p_2))\geq 0$;

(ii) 可交换性, $d(h_1(p_1),h_2(p_2))=d(h_2(p_2),h_1(p_1))$;

(iii) 反身性, $d(h_1(p_1),h_2(p_2))=0\Longleftrightarrow h_1(p_1)=h_2(p_2)$.

2 WPIVHFS 定义与测度范式

首先给予 PIVHFS 新的表达形式, 然后将决策专家权重注入 PIVHFS 中进而定义了 WPIVHFS, 并用四维点坐标来描述 WPIVHFS, 在此基础上建立 WPIVHFE 测度模型.

定义 5 PIVHFE $h(p)=\{\gamma_k=[\gamma_k^-,\gamma_k^+]p_k\mid\gamma_k\subset[0,1];k=1,2,\cdots,\sharp h(p);\sum_{k=1}^{\sharp h(p)}p_k=1\}$, 式中 p_k 为区间值隶属度 γ_k 的概率, $\sharp h(p)$ 为 PIVHFE $h(p)$ 中区间值隶属度的个数.

定义 6 WPIVHFE $\tilde{h}(p)=\{\gamma_k=[\gamma_k^-,\gamma_k^+](p_k,\omega_k)\mid[\gamma_k^-,\gamma_k^+]\subset[0,1];\sum_{k=1}^{\sharp\tilde{h}(p)}p_k=1,\sum_{k=1}^{\sharp\tilde{h}(p)}\omega_k=1,\omega_k=\sum_{t=1}^{\sharp\gamma_k}\omega_t,k\in\{1,2,\cdots,\sharp\tilde{h}(p),\},t\in\{1,2,\cdots,\sharp\gamma_k,\}\}$, 式中 p_k 为区间值隶属度 γ_k 的概率, $\sharp\tilde{h}(p)$ 为 WPIVHFE $h(p)$ 中区间值隶属度的个数, γ_k 为区间值隶属度 γ_k 对应的决策专家权重, $\sharp\gamma_k$ 为认可区间值隶属度 γ_k 的决策专家个数, $\omega_k=\sum_{t=1}^{\sharp\gamma_k}\omega_t$ 为将认可区间值隶属度 γ_k 的所有决策专家权重相加.

定义 7 将 WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 以四维点坐标记为 $\tilde{\tilde{h}}(p)=\{(\bar{\gamma}_1,\gamma_2^{\mp},p_1,\omega_1),(\bar{\gamma}_2,\gamma_2^{\mp},p_2,\omega_2),\cdots,(\bar{\gamma}_{\sharp\tilde{\tilde{h}}(p)},\gamma^{\mp}_{\sharp\tilde{\tilde{h}}(p)},p_{\sharp\tilde{\tilde{h}}(p)},\omega_{\sharp\tilde{\tilde{h}}(p)})\}$, 在 $\tilde{\tilde{h}}(p)$ 中, 默认有序条件为 $\bar{\gamma}_1>\bar{\gamma}_2>\cdots,\bar{\gamma}_{\sharp\tilde{\tilde{h}}(p)}$, 若 $\bar{\gamma}_k>\bar{\gamma}_{k+1}$, 则有 $\gamma_k^{\mp}>\gamma_{k+1}^{\mp}$; 若 $\bar{\gamma}_k=\bar{\gamma}_{k+1}$, $\gamma_k^{\mp}=\gamma_{k+1}^{\mp}$, 则有 $p_k>p_{k+1}$; 若 $\bar{\gamma}_k=\bar{\gamma}_{k+1}$, $\gamma_k^{\mp}=\gamma_{k+1}^{\mp}$, $p_k=p_{k+1}$, 则有 $\omega_k>\omega_{k+1}$, $\sharp\tilde{\tilde{h}}(p)$ 为 WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 中的元素个数.

在定义 7 中, $\bar{\gamma}_k=(1/2)(\gamma_k^-+\gamma_k^+)$ $(k\in\{1,2,\cdots,\sharp\tilde{\tilde{h}}(p)\})$ 为区间值隶属度 γ_k 的中位数, $\gamma_k^{\mp}=\gamma_k^-/\gamma_k^+$ 为区间值隶属度 γ_k 的清晰度, $\gamma_k^{\mp}$ 表达的含义是: $\gamma_k^{\mp}$ 越小, 则区间值隶属度 γ_k 越不清晰, 也即 γ_k 的长度越长. 当 $\gamma_k^{\mp}=1$ 时, 说明区间值隶属度 γ_k 为一个具体的隶属度值, 则此时隶属度 γ_k 最清晰. 这里规定, (1) 若 $\gamma_k^-=\gamma_k^+=0$, 则 $\gamma_k^{\mp}=0$; (2) 若 $\gamma_k^-=0$, i) $\gamma_k^+\in(0,1/2]$, 则 $\gamma_k^{\mp}=\gamma_k^+$. ii) $\gamma_k^+\in(1/2,1]$, 则 $\gamma_k^{\mp}=1-\gamma_k^+$.

为了方便, WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 用四维点坐标形式书写的 $\tilde{\tilde{h}}(p)$, 下文皆用 $\tilde{h}(p)$ 表示, 在具体情境下会使用文字加以注解. 在定义 6 与定义 7 的基础上来计算 WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 的外部固定函数值 (定义 8).

定义 8 WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 的外部固定函数值的计算方法为

$$\varphi(\tilde{h}(p))=\frac{\sum_{k=1}^{\sharp\tilde{h}(p)}\sqrt{(\bar{\gamma}_k)^2+(\gamma_k^{\mp})^2+(p_k)^2+(\omega_k)^2}}{2\sharp\tilde{h}(p)}\tag{1}$$

由式 (1) 可知, WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 的外部固定函数值的大小由区间值隶属度 γ_k 的中位数、区间值隶属度 γ_k 的清晰度、γ_k 的概率以及 γ_k 相对应的决策专家权重共同确定. 同时不难验证 $\varphi(\tilde{h}(p))\in[0,1]$, 且 $\varphi(\tilde{h}(p))$ 关于 $\bar{\gamma}_k,\gamma_k^{\mp},p_k,\omega_k$ 均单调递增.

定义 9 在有 $\sharp\tilde{h}(p)$ 个元素构成的 WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 中, $\tilde{h}(p)$ 中任意 2 个加权概率区间值犹豫模糊数 (Weighted Probabilistic Interval Valued Hesitant Fuzzy Number, WPIVHFN) 记为 $\{[\gamma_k^-,\gamma_k^+](p_k,\omega_k),[\gamma_{k'}^-,\gamma_{k'}^+](p_{k'},\omega_{k'})\}$, $k,k'\in\{1,2,\cdots,\sharp\tilde{h}(p)\}$, 则 WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 的内部稳定函数值 $\phi(\tilde{h}(p))$ 计算方法为

$$\phi(\tilde{h}(p))=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{k'=1,k'\neq k}^{\sharp\tilde{h}(p)}\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}(p)}\dfrac{\bar{\gamma}_k\bar{\gamma}_{k'}+\gamma_k^{\mp}\gamma_{k'}^{\mp}+p_kp_{k'}+\omega_k\omega_{k'}}{\sqrt{(\bar{\gamma}_k)^2+(\gamma_k^{\mp})^2+(p_k)^2+(\omega_k)^2}\sqrt{(\bar{\gamma}_{k'})^2+(\gamma_{k'}^{\mp})^2+(p_{k'})^2+(\omega_{k'})^2}}}{2C_{\sharp\tilde{h}(p)}^2}, & \sharp\tilde{h}(p)\geq 2\\ 1, & \sharp\tilde{h}(p)=1\end{cases}\tag{2}$$

在式 (2) 中, $C_{\sharp\tilde{h}(p)}^{\,2}=\sharp\tilde{h}(p)!/(2!(\sharp\tilde{h}(p)-2)!)$ 为二项式系数, 式中符号分别有 $\bar{\gamma}_k=(\gamma_k^-+\gamma_k^+)/2$, $\gamma_k^{\mp}=\gamma_k^-/\gamma_k^+$, $\bar{\gamma}_{k'}=(\gamma_{k'}^-+\gamma_{k'}^+)/2$, $\gamma_{k'}^{\mp}=\gamma_{k'}^-/\gamma_{k'}^+$, $k,k'\in\{1,2,\cdots,\sharp\tilde{h}(p)\}$.

性质 1 $\phi(\tilde{h}(p))\in[0,1]$.

证明 构造 2 个向量 $\vec{\gamma}_k=(\bar{\gamma}_k,\gamma_k^{\mp},p_k,\omega_k)$,$\vec{\gamma}_{k'}=(\bar{\gamma}_{k'},\gamma_{k'}^{\mp},p_{k'},\omega_{k'})$, 向量 $\vec{\gamma}_k$与 $\vec{\gamma}_{k'}$ 之间的夹角表示为 $\langle\vec{\gamma}_k,\vec{\gamma}_{k'}\rangle$, 则显然有如下式子成立

$$\frac{\bar{\gamma}_k\bar{\gamma}_{k'}+\gamma_k^{\mp}\gamma_{k'}^{\mp}+p_kp_{k'}+\omega_k\omega_{k'}}{\sqrt{(\bar{\gamma}_k)^2+(\gamma_k^{\mp})^2+(p_k)^2+(\omega_k)^2}\sqrt{(\bar{\gamma}_{k'})^2+(\gamma_{k'}^{\mp})^2+(p_{k'})^2+(\omega_{k'})^2}}=\cos\langle\vec{\gamma}_k,\vec{\gamma}_{k'}\rangle,$$

因为 $k,k'\in\{1,2,\cdots,\sharp\tilde{h}(p)\}$, 也即 $\vec{\gamma}_k$、$\vec{\gamma}_{k'}$ 为 $\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2,\cdots,\vec{\gamma}_{\sharp\tilde{h}(p)}$ 中的任意 2 个向量, 当 $\sharp\tilde{h}(p)\geq 2$ 时, 式 (2) 中的计算量为 $2C_{\sharp\tilde{h}(p)}^2$ (计算量之所以乘以 2 是考虑到 k,k' 的无序性所造成的计算量加倍情形). 又 $\sum\limits_{k'=1,k'\neq k}^{\sharp\tilde{h}(p)}\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}(p)}\cos\langle\vec{\gamma}_k,\vec{\gamma}_{k'}\rangle\leq 2C_{\sharp\tilde{h}(p)}^2$, 即知 $\phi(\tilde{h}(p))\in[0,1]$ 一定成立.

$(1/2C_{\sharp\tilde{h}(p)}^2)\sum\limits_{k'=1,k'\neq k}^{\sharp\tilde{h}(p)}\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}(p)}(\bar{\gamma}_k\bar{\gamma}_{k'}+\gamma_k^{\mp}\gamma_{k'}^{\mp}+p_kp_{k'}+\omega_k\omega_{k'})/(\sqrt{(\bar{\gamma}_k)^2+(\gamma_k^{\mp})^2+(p_k)^2+(\omega_k)^2}\sqrt{(\bar{\gamma}_{k'})^2+(\gamma_{k'}^{\mp})^2+(p_{k'})^2+(\omega_{k'})^2})$ 表达的含义为: 在由 $\sharp\tilde{h}(p)$ 个向量构成的向量群中, 计算 WPIVHFE $\tilde{h}(p)$ 内部所有两两向量夹角余弦值的平均值 (也可将 $\vec{\gamma}_k=(\bar{\gamma}_k,\gamma_k^{\mp},p_k,\omega_k)$ 理解为以原点为始发点, 点 $(\bar{\gamma}_k,\gamma_k^{\mp},p_k,\,\omega_k)$ 为终点的四维向量). $\phi(\tilde{h}(p))$ 值反映了 $\tilde{h}(p)$ 中的元素集中程度, 一般来说, $\phi(\tilde{h}(p))$ 值越大, $\tilde{h}(p)$ 中的元素就越集中 (共线元素除外, 因为向量 $\vec{\gamma}_k$ 与 $\vec{\gamma}_{k'}$ 共线时, $\cos\langle\vec{\gamma}_k,\vec{\gamma}_{k'}\rangle=1$, 在具体的决策问题中, 决策专家提供的决策信息数据: 区间值隶属度的中位数、区间值隶属度的清晰度、概率以及相应的决策专家权重依次呈线性增长的案例比较少见, 本文不考虑此种情形).

定义 10 对于 2 个 WPIVHFE $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$, $\tilde{h}_1(p_1)=\{[\gamma_{11}^-,\gamma_{11}^+](p_{11},\,\omega_{11}),\cdots,\,[\gamma_{1\sharp\tilde{h}_1(p_1)}^-,\gamma_{1\,\sharp\tilde{h}_1(p_1)}^+](p_{1\sharp\tilde{h}_1(p_1)},\omega_{1\sharp\tilde{h}_1(p_1)})\}$, $\tilde{h}_2(p_2)=\{[\gamma_{21}^-,\gamma_{21}^+](p_{21},\,\omega_{21}),\cdots,[\gamma_{2\sharp\tilde{h}_2(p_2)}^-,\gamma_{2\sharp\tilde{h}_2(p_2)}^+]\,(p_{2\sharp\tilde{h}_2(p_2)},\omega_{2\sharp\tilde{h}_2(p_2)})\}$.

根据 WPIVHFE 的外部固定函数值与内部稳定函数值, 本文判断 $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$ 的大小规则为:

(i) 若 $\varphi(\tilde{h}_1(p_1))>\varphi(\tilde{h}_2(p_2))$, 则 $\tilde{h}_1(p_1)>\tilde{h}_2(p_2)$;

(ii) 若 $\varphi(\tilde{h}_1(p_1))=\varphi(\tilde{h}_2(p_2))$, 则分两种情况:

(a) $\phi(\tilde{h}_1(p_1))>\phi(\tilde{h}_2(p_2))$, 则 $\tilde{h}_1(p_1)>\tilde{h}_2(p_2)$;

(b) $\phi(\tilde{h}_1(p_1))=\phi(\tilde{h}_2(p_2))$, 则 $\tilde{h}_1(p_1)=\tilde{h}_2(p_2)$.

下面给出一个算例来说明本文定义 WPIVHFE $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$ 大小规则的有效性.

例 1 $h_1(p_1)=\{[0.3,0.5]0.6,[0.6,0.8]0.4\}$, $h_2(p_2)=\{[0.4,0.5]0.5,[0.55,0.75]0.5\}$, 比较 PIVHFE $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$ 的大小.

证明 若按照定义 3 的比较规则, 得 $\Delta(h_1(p_1))=0.26$, $\Delta(h_2(p_2))=0.275$, 即 $h_1(p_1)<h_2(p_2)$.

若给予 $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$ 中的区间隶属度平均添加决策专家权重, 分别有: $\tilde{h}_1(p_1)=\{[0.3,0.5](0.6,0.5),[0.6,0.8](0.4,0.5)\}$, $\tilde{h}_2(p_2)=\{[0.4,0.5](0.5,0.5),[0.55,0.75](0.5,0.5)\}$. 按照定义 9 的比较规则, 可得 $\phi(\tilde{h}_1(p_1))=0.568\,1$, $\phi(\tilde{h}_2(p_2))=0.591\,8$, 即知 $\tilde{h}_1(p_1)<\tilde{h}_2(p_2)$, 与定义 3 比较方法得到的排序结果一致, 说明在决策过程中, 采用本文排序规则, 若对于每一个区间值隶属度值所关联的决策专家没有偏好, 则不会影响 $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$ 的排序, 即使将决策专家的平均权重注入 $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$ 中, 也不会影响 $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$ 的比较结果, 这说明本文定义的针对 2 个 WPIVHFE 大小比较规则的有效性.

若给予 PIVHFE $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$ 中的区间值隶属度值不添加决策专家平均权重, 按照如下方法添加决策专家权重 $\tilde{h}_1(p_1)=\{[0.3,0.5](0.6,0.3),[0.6,0.8](0.4,0.7)\}$, $\tilde{h}_2(p_2)=\{[0.4,0.5](0.5,0.7),[0.55,0.75](0.5,0.3)\}$. 按照定义 9

的比较规则, 可得 $\phi(\tilde{h}_1(p_1))=0.604\,4$, $\phi(\tilde{h}_2(p_2))=0.599\,6$, 即知 $\tilde{h}_1(p_1)>\tilde{h}_2(p_2)$, 与在 PIVHFE $h_1(p_1)$ 和 $h_2(p_2)$ 中平均添加决策专家权重的情形得到了相反的排序结果, 说明决策专家有偏好则会影响 PIVHFE $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$ 的比较结果, 表明决策专家的偏好因素在 $h_1(p_1)$ 与 $h_2(p_2)$ 的大小比较过程中所起到的作用不容忽视 (在具体决策问题中, 决策专家的重要性虽然可以由集结算子进行体现, 但是在原始的概率区间值犹豫模糊评审信息中却没有显示), 进一步说明了本文将决策专家权重注入 PIVHFS 中的必要性与科学性.

对于 2 个 WPIVHFE $\tilde{h}_i(p_i)(i=1,2)$, $\sharp\tilde{h}_i(p_i)$ $(i=1,2)$ 分别表示 $\tilde{h}_i(p_i)$ $(i=1,2)$ 中的元素个数, $\tilde{h}_1(p_1)=\{[\gamma_{11}^-,\gamma_{11}^+](p_{11},\omega_{11}),[\gamma_{12}^-,\gamma_{12}^+](p_{12},\omega_{12}),\cdots,[\gamma_{1\sharp\tilde{h}_1(p_1)}^-,\ \gamma_{1\sharp\tilde{h}_1(p_1)}^+](p_{1\sharp\tilde{h}_1(p_1)},\ \omega_{1\sharp\tilde{h}_1(p_1)})\}$, $\tilde{h}_2(p_2)=\{[\gamma_{21}^-,\gamma_{21}^+](p_{21},\omega_{21}),[\gamma_{22}^-,\gamma_{22}^+](p_{22},\ \omega_{22}),\cdots,[\gamma_{2\sharp\tilde{h}_2(p_2)}^-,\gamma_{2\sharp\tilde{h}_2(p_2)}^+]\ (p_{2\sharp\tilde{h}_2(p_2)},\ \omega_{2\sharp\tilde{h}_2(p_2)})\}$. 本文规定 $\tilde{h}_i(p_i)(i=1,2)$ 中的区间值隶属度的中位数、区间值隶属度的清晰度、概率以及决策专家权重依次为降序排列, 分别满足以下条件:

(i) $\bar{\gamma}_{1j}=(\gamma_{1j}^-+\gamma_{1j}^+)/2>\bar{\gamma}_{1(j+1)}=(\gamma_{1(j+1)}^-+\gamma_{1(j+1)}^+)/2$, 则分三种情况:

(a) 若 $\bar{\gamma}_{1j}=\bar{\gamma}_{1(j+1)}$, 则 $\gamma_{1j}^{\mp}=\gamma_{1j}^-/\gamma_{1j}^+>\gamma_{1(j+1)}^{\mp}=\gamma_{1(j+1)}^-/\gamma_{1(j+1)}^+$;

(b) 若 $\bar{\gamma}_{1j}=\bar{\gamma}_{1(j+1)}$ 且 $\gamma_{1j}^{\mp}=\gamma_{1(j+1)}^{\mp}$, 则 $p_{1j}>p_{1(j+1)}$;

(c) 若 $\bar{\gamma}_{1j}=\bar{\gamma}_{1(j+1)}$, $\gamma_{1j}^{\mp}=\gamma_{1(j+1)}^{\mp}$ 以及 $p_{1j}=p_{1(j+1)}$, 则 $\omega_{1j}>\omega_{1(j+1)}$, $j\in\{1,2,\cdots,\sharp\tilde{h}_1(p_1)\}$.

(ii) $\bar{\gamma}_{2k}=(\gamma_{2k}^-+\gamma_{2k}^+)/2>\bar{\gamma}_{2(k+1)}=(\gamma_{2(k+1)}^-+\gamma_{2(k+1)}^+)/2$, 则分三种情况:

(a) 若 $\bar{\gamma}_{2k}=\bar{\gamma}_{2(k+1)}$, 则 $\gamma_{2k}^{\mp}=\gamma_{2k}^-/\gamma_{2k}^+>\gamma_{2(k+1)}^{\mp}=\gamma_{2(k+1)}^-/\gamma_{2(k+1)}^+$;

(b) 若 $\bar{\gamma}_{2k}=\bar{\gamma}_{2(k+1)}$ 且 $\gamma_{2k}^{\mp}=\gamma_{2(k+1)}^{\mp}$, 则 $p_{2k}>p_{2(k+1)}$;

(c) 若 $\bar{\gamma}_{2k}=\bar{\gamma}_{2(k+1)}$, $\gamma_{2k}^{\mp}=\gamma_{2(k+1)}^{\mp}$ 以及 $p_{2k}=p_{2(k+1)}$, 则 $\omega_{2k}>\omega_{2(k+1)}$, $k\in\{1,2,\cdots,\sharp\tilde{h}_2(p_2)\}$.

对 WPIVHFE $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$ 进行距离测度时, 若二者元素数量不等, 此时将二者元素数量皆化为 1, 化简后的 $\tilde{h}_1(p_1)=\{[\gamma_1^-,\gamma_1^+](p_1,\omega_1)\}$, $\tilde{h}_2(p_2)=\{[\gamma_2^-,\gamma_2^+](p_2,\ \omega_2)\}$, 其中 $\gamma_1^-=\sum\limits_{j=1}^{\sharp\tilde{h}_1(p_1)}\gamma_{1j}^-/\sharp\tilde{h}_1(p_1)$, $\gamma_1^+=\sum\limits_{j=1}^{\sharp\tilde{h}_1(p_1)}\gamma_{1j}^+/\sharp\tilde{h}_1(p_1)$, $p_1=\sum\limits_{j=1}^{\sharp\tilde{h}_1(p_1)}p_{1j}^+/\sharp\tilde{h}_1(p_1)$, $\omega_1=\sum\limits_{j=1}^{\sharp\tilde{h}_1(p_1)}\omega_{1j}^+/\sharp\tilde{h}_1(p_1)$; $\gamma_2^-=\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}_2(p_2)}\gamma_{2k}^-/\sharp\tilde{h}_2(p_2)$, $\gamma_2^+=\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}_2(p_2)}\gamma_{2k}^+/\sharp\tilde{h}_2(p_2)$, $p_2=\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}_2(p_2)}p_{2k}^+/\sharp\tilde{h}_2(p_2)$, $\omega_2=\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}_2(p_2)}\omega_{2k}^+/\sharp\tilde{h}_2(p_2)$.

根据以上陈述, 以下给出 2 个 WPIVHFE $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$ 之间的距离公式 (定义 11).

定义 11 WPIVHFE $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$ 之间的距离 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))$ 计算方法为

$$d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=\begin{cases}\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{\sharp\tilde{h}_1(p_1)}\sum\limits_{j=1}^{\sharp\tilde{h}_2(p_2)}\sqrt{(\bar{\gamma}_{1j}-\bar{\gamma}_{2j})^2+(\gamma_{1j}^{\mp}-\gamma_{2j}^{\mp})^2+(p_{1j}-p_{2j})^2+(\omega_{1j}-\omega_{2j})^2}}{2\sharp\tilde{h}_1(p_1)}, & \sharp\tilde{h}_1=\sharp\tilde{h}_2\\ \dfrac{\sqrt{(\bar{\gamma}_1-\bar{\gamma}_2)^2+(\gamma_1^{\mp}-\gamma_2^{\mp})^2+(p_1-p_2)^2+(\omega_1-\omega_2)^2}}{2}, & \sharp\tilde{h}_1\neq\sharp\tilde{h}_2\end{cases}\tag{3}$$

式 (3) 中, $\sharp\tilde{h}_1$, $\sharp\tilde{h}_2$ 分别指 $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$ 的元素个数. $\bar{\gamma}_1=(\gamma_1^-+\gamma_1^+)/2$, $\bar{\gamma}_2=(\gamma_2^-+\gamma_2^+)/2$; $\bar{\gamma}_1^{\mp}=\gamma_1^-/\gamma_1^+$, $\bar{\gamma}_2^{\mp}=\gamma_2^-/\gamma_2^+$; $\bar{p}_1=p_1$, $\bar{p}_2=p_2$; $\bar{\omega}_1=\omega_1$, $\bar{\omega}_2=\omega_2$.

下面证明距离 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))$ 满足定义 4 中的 3 个公理性条件.

证明 (i) 当 $\sharp\tilde{h}_1(p_1)\neq\sharp\tilde{h}_2(p_2)$ 时, 分两种情况:

(a) $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))>0$ 与 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=d(\tilde{h}_2(p_2),\tilde{h}_1(p_1))$ 显然成立.

(b) 当 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=0$ 时, 只需证明 $\tilde{h}_1(p_1)=\{[\gamma_1^-,\gamma_1^+](p_1,\omega_1)\}=\tilde{h}_2(p_2)=\{[\gamma_2^-,\ \gamma_2^+](p_2,\omega_2)\}$ 成立. 此时有 $\bar{\gamma}_1=\bar{\gamma}_2$; $\bar{\gamma}_1^{\mp}=\bar{\gamma}_2^{\mp}$; $\bar{p}_1=\bar{p}_2$; $\bar{\omega}_1=\bar{\omega}_2$, 又因为 $\bar{\gamma}_1=(\gamma_1^-+\gamma_1^+)/2$, $\bar{\gamma}_2=(\gamma_2^-+\gamma_2^+)/2$; $\bar{\gamma}_1^{\mp}=\gamma_1^-/\gamma_1^+$, $\bar{\gamma}_2^{\mp}=\gamma_2^-/\gamma_2^+$; $\bar{p}_1=p_1$, $\bar{p}_2=p_2$; $\bar{\omega}_1=\omega_1$, $\bar{\omega}_2=\omega_2$, 解得 $\gamma_1^-=2\bar{\gamma}_1\cdot\bar{\gamma}_1^{\mp}/(\bar{\gamma}_1^{\mp}+1)$, $\gamma_1^+=2\bar{\gamma}_1/(\bar{\gamma}_1^{\mp}+1)$, $\gamma_2^-=2\bar{\gamma}_2\cdot\bar{\gamma}_2^{\mp}/(\bar{\gamma}_2^{\mp}+1)$, $\gamma_2^+=2\bar{\gamma}_2/(\bar{\gamma}_2^{\mp}+1)$, 进而可得 $\gamma_1^-=\gamma_2^-$, $\gamma_1^+=\gamma_2^+$; $p_1=p_2$; $\omega_1=\omega_2$, 即有 $\tilde{h}_1(p_1)=\tilde{h}_2(p_2)$. 当 $\tilde{h}_1(p_1)=\tilde{h}_2(p_2)$ 时, 有 $\gamma_1^-=\gamma_2^-$, $\gamma_1^+=\gamma_2^+$; $p_1=p_2$; $\omega_1=\omega_2$, 显然有 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=0$. 综上可知 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=0\Leftrightarrow\tilde{h}_1(p_1)=\tilde{h}_2(p_2)$ 成立.

(ii) 当 $\sharp\tilde{h}_1(p_1)=\sharp\tilde{h}_2(p_2)$ 时, 分两种情况:

(a) $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))>0$ 与 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=d(\tilde{h}_2(p_2),\tilde{h}_1(p_1))$ 显然成立.

(b) 当 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=0$ 时, 对 $\forall j\in\{1,2,\cdots,\sharp h_1(p_1)\}$ 有 $\bar{\gamma}_{1j}=\bar{\gamma}_{2j}$; $\bar{\gamma}_{1j}^{\mp}=\bar{\gamma}_{2j}^{\mp}$; $\bar{p}_{1j}=\bar{p}_{2j}$; $\bar{\omega}_{1j}=\bar{\omega}_{2j}$, 又因为 $\bar{\gamma}_{1j}=(\gamma_{1j}^-+\gamma_{1j}^+)/2$, $\bar{\gamma}_{2j}=(\gamma_{2j}^-+\gamma_{2j}^+)/2$; $\bar{\gamma}_{1j}^{\mp}=\gamma_{1j}^-/\gamma_{1j}^+$, $\bar{\gamma}_{2j}^{\mp}=\gamma_{2j}^-/\gamma_{2j}^+$. 解得 $\gamma_{1j}^-=2\bar{\gamma}_{1j}\cdot\bar{\gamma}_{1j}^{\mp}/(\bar{\gamma}_{1j}^{\mp}+1)$, $\gamma_{1j}^+=2\bar{\gamma}_{1j}/(\bar{\gamma}_{1j}^{\mp}+1)$, $\gamma_{2j}^-=2\bar{\gamma}_{2j}\cdot\bar{\gamma}_{2j}^{\mp}/(\bar{\gamma}_{2j}^{\mp}+1)$, $\gamma_{2j}^+=2\bar{\gamma}_{2j}/(\bar{\gamma}_{2j}^{\mp}+1)$, 进而可得 $\gamma_{1j}^-=\gamma_{2j}^-$, $\gamma_{1j}^+=\gamma_{2j}^+$, 考虑到 j 的任意性,

即 $\tilde{h}_1(p_1)=\tilde{h}_2(p_2)$. 当 $\tilde{h}_1(p_1)=\tilde{h}_2(p_2)$ 时, 有 $\gamma_{1j}^-=\gamma_{2j}^-$, $\gamma_{1j}^+=\gamma_{2j}^+$; $p_{1j}=p_{2j}$; $\omega_{1j}=\omega_{2j}$, 即 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=0$. 综上可知 $d(\tilde{h}_1(p_1),\tilde{h}_2(p_2))=0\Leftrightarrow\tilde{h}_1(p_1)=\tilde{h}_2(p_2)$ 成立.

结合 (i)、(ii) 可知, 定义 11 关于 $\tilde{h}_1(p_1)$ 与 $\tilde{h}_2(p_2)$ 之间的距离 d 满足定义 4 中的 3 个公理性条件.

3　建立多属性决策模型

为了应用本文 WPIVHFS 知识来解决群决策问题, 这里给出一个 WPIVHFS 多属性群决策问题的定义 (定义 12).

定义 12 在多属性群决策问题中, 评审专家组集合 $Z=(z_1,\cdots,z_t,\cdots,z_T)$ 中各位评审专家的权重为 $\omega_{z_t}(t\in\{1,2,\cdots,T\})$ (已知), 备选方案集 $A=(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_I)$ (对备选方案无偏好)、测评属性集 $G=(g_1,\cdots,g_j,\cdots,g_J)$, 属性的权重用 ω_j 表示且未知, 第 t 位专家给予第 i 个方案在第 j 个属性上的评价信息用区间值隶属度 γ_{tij} 表示($\gamma_{tij}\subset[0,1]$), 汇总所有专家给出的评价信息 γ_{tij}, 则可得第 i 个方案在第 j 个属性上的测评数据为 WPIVHFE $\tilde{h}_{ij}(p_{ij})$, $\tilde{h}_{ij}(p_{ij})=\{\gamma_{ijk}[\gamma_{ijk}^-,\gamma_{ijk}^+](p_{ijk},\omega_{ijk})|\gamma_{ijk}\subset[0,1],k\in\{1,2,\cdots,\sharp\tilde{h}_{ij}(p_{ij})\}$, $\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}_{ij}(p_{ij})}p_{ijk}=1$, $\sum\limits_{k=1}^{\sharp\tilde{h}_{ij}(p_{ij})}\omega_{ijk}=1,\omega_{ijk}=\sum\limits_{t\in\{1,2,\cdots,\sharp\gamma_{ijk}\}}\omega_{z_t}\}$, $\sharp\tilde{h}_{ij}(p_{ij})$ 为 $\tilde{h}_{ijk}(p_{ijk})$ 的个数, $\sharp\gamma_{ijk}$ 为认可 γ_{ijk} 的评审专家个数, $\omega_{ijk}=\sum\limits_{t\in\{1,2,\cdots,\sharp\gamma_{ijk}\}}\omega_{z_t}$ 为将认可区间值隶属度 γ_{ijk} 的所有评审专家权重相加. $\tilde{h}_{ijk}(p_{ijk})=[\gamma_{ijk}^-,\gamma_{ijk}^+](p_{ijk},\omega_{ijk})$ 为 WPIVHFN.

下文决策模型在定义 12 的基础上建立, 且默认属性为效益型类型.

3.1　计算属性权重

在建立模型来解决方案排序问题的过程中, 计算属性权重是一个不可或缺的重要步骤. 计算属性权重比较成熟的方法有熵值法、离差最大化方法、线性规划法等. 其中, 熵值法确定属性权重的核心思想是根据所有方案在各属性上的评价信息差异程度来计算各属性的权重. 本文利用熵值法来计算属性权重, 有别于前人的计算思路, 这里不仅考虑所有方案在各个属性上的评价信息差异程度, 而且还兼顾所有方案在各个属性上的决策专家内部评价信息差异程度.

根据方案在各个属性上评价信息的差异程度计算出的外部权重用 $\omega_j^1(j\in\{1,2,\cdots,J\})$ 表示, 根据方案在各个属性上决策专家内部评价信息的差异程度计算出的内部权重用 $\omega_j^2(j\in\{1,2,\cdots,J\})$ 表示, 属性的综合权重用 $\omega_j(\,j\in\{1,2,\cdots,J\})$ 表示. 具体计算过程如下:

首先, 根据定义 8 与 9, 分别计算每个方案在各属性上的外部固定函数值 $\varphi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))$、内部稳定函数值 $\phi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))$.

其次, 计算各属性下的熵值 S_j^1、S_j^2, 有 $S_j^1=-\frac{1}{\ln I}\sum\limits_{i=1}^{I}\varphi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))\ln\varphi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))$, $S_j^2=-\frac{1}{\ln I}\sum\limits_{i=1}^{I}\phi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))\ln\phi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))$.

再次, 计算属性的两种权重 ω_j^1、ω_j^2, $\omega_j^1=|1-S_j^1|/\sum\limits_{j'=1}^{J}|1-S_{j'}^1|$, $\omega_j^2=|1-S_j^1|/\sum\limits_{j''=1}^{J}|1-S_{j''}^1|$.

最后, 确定各属性的综合权重 ω_j, $\omega_j=|\omega_j^1-\omega_j^2|/\sum\limits_{j'''=1}^{J}|\omega_{j'''}^1-\omega_{j'''}^2|$, $(j\in\{1,2,\cdots,J\})$.

3.2　决策过程

步骤 1 计算属性的外部权重 ω_j^1、内部权重 ω_j^2 以及综合权重 ω_j $(j\in\{1,2,\cdots,J\})$.

步骤 2 由式 (1)、式 (2) 分别计算各方案在所有属性上的外部固定函数值 $\varphi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))$ 与内部稳定函数值 $\phi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))$ $(i=1,2,\cdots,I;j=1,2,\cdots,J)$.

步骤 3 计算各方案的综合属性值 $F(a_i)$, 其中

$$F(a_i)=\prod_{j=1}^{J}(\alpha\varphi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij}))+\beta\phi(\tilde{h}_{ij}(p_{ij})))^{\omega_j},\ \ i=1,2,\cdots,I \tag{4}$$

在式 (4) 中, 参数 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 且 $\alpha+\beta=1$, 式 (4) 表达的含义为: 决策者可以依据方案在属性上的外部固定函数值与内部稳定函数值来计算方案的综合属性值, 式 (4) 通过对参数 α,β 灵活选取, 可以从不同角度观察方案的排序结果.

步骤 4 根据方案的综合属性值 $F(a_i)$ 进行排序, $F(a_i)$ 值大者其对应的方案 a_i 为优.

步骤 5 结束.

4 数值算例

某校科技处收到关于教育教学内容方面的 5 篇项目申请书, 按照学校教学科研工作安排, 准备择优选取 2 项作为立项项目. 科技处邀请 3 位评审专家对 5 篇项目申请书进行评审, 从申请书中阐述方法的可行性 (g_1)、理论研究系统性 (g_2) 以及创新性 (g_3) 等 3 个维度进行评审, 3 位评审专家表示为 $z_t(t=1,2,3)$, 其权重依次为 0.25、0.35、0.4. 5 篇论文标记为 $a_i(i=1,2,3,4,5)$, 3 个评审维度的外部权重 (ω_j^1)、内部权重 (ω_j^2)、综合权重 (ω_j) 均未知 $(j=1,2,3)$, 3 位评审专家给出的原始评审数据信息见表 1. 其中:

$A_1G_1=\{[0.62,0.72]|z_1,[0.65,0.78]|z_2,z_3\}$, $A_2G_1=\{[0.84,0.96]|z_1,z_2,\ z_3\}$,

$A_1G_2=\{[0.74,0.88]|z_1,[0.68,0.84]|z_2,[0.62,0.78]|z_3\}$,

$A_1G_3=\{[0.82,0.94]|z_1,z_2,z_3\}$, $A_2G_2=\{[0.68,0.76]|z_1,z_2,[0.72,0.82]|z_3\}$,

$A_2G_3=\{[0.72,0.78]|z_1,[0.66,0.76]|z_2,[0.64,0.72]|z_3\}$,

$A_3G_1=\{[0.71,0.79]|z_1,[0.67,0.75]|z_2,z_3\}$, $A_3G_2=\{[0.86,0.96]|z_1,z_2,z_3\}$,

$A_3G_3=\{[0.71,0.77]|z_1,[0.73,0.79]|z_2,[0.65,0.71]|z_3\}$,

$A_4G_1=\{[0.61,0.67]|z_1,[0.63,0.71]|z_2,[0.65,0.75]|z_3\}$,

$A_4G_2=\{[0.68,0.76]|z_1,z_2,z_3\}$, $A_4G_3=\{[0.8,0.94]|z_1,z_2,z_3\}$,

$A_5G_1=\{[0.71,0.77]|z_1,z_2,[0.73,0.79]|z_3\}$, $A_5G_3=\{[0.78,0.82]|z_1,z_2,z_3\}$.

$A_5G_2=\{[0.64,0.76]|z_1,z_2,[0.68,0.78]|z_3\}$.

应用本文方法对以上 5 篇项目申请书进行量化分析并排序. 在建立决策模型之前, 可以先将表 1 中的原始评审信息转换为 PIVHFS 决策信息, 再将评审专家权重注入 PIVHFS 决策信息中, 以此构建 WPIVHFS 决策信息, 最后用四维点坐标描述决策信息, 如表 2 所示.

表 1 5 篇项目申请书的评审信息表

申请书	g_1	g_2	g_3
a_1	A_1G_1	A_1G_2	A_1G_3
a_2	A_2G_1	A_2G_2	A_2G_3
a_3	A_3G_1	A_3G_2	A_3G_3
a_4	A_4G_1	A_4G_2	A_4G_3
a_5	A_5G_1	A_5G_2	A_5G_3

表 2 平面向量评审信息表

申请书	g_1	g_2	g_3
a_1	a_1g_1	a_1g_2	a_1g_3
a_2	a_2g_1	a_2g_2	a_2g_3
a_3	a_3g_1	a_3g_2	a_3g_3
a_4	a_4g_1	a_4g_2	a_4g_3
a_5	a_5g_1	a_5g_2	a_5g_3

其中:

$a_1g_1=\{(0.67,0.861\ 1,0.333\ 3,0.25),(0.72,0.822\ 8,0.666\ 7,0.75)\}$,

$a_1g_2=\{(0.81,0.913\ 6,0.333\ 3,0.25),(0.76,0.809\ 5,0.333\ 3,0.35),(0.70,0.794\ 9,0.333\ 3,\ 0.40)\}$,

$a_1g_3=\{(0.88,0.872\ 3,1.00,1.00)\}$, $a_2g_1=\{(0.90,0.875\ 0,1.00,1.00)\}$,

$a_2g_2=\{(0.72,0.894\ 7,0.666\ 7,0.60),(0.77,0.878\ 0,0.333\ 3,0.40)\}$,

$a_2g_3=\{(0.75,0.923\ 1,0.333\ 3,0.25),(0.71,0.868\ 4,0.333\ 3,0.35),(0.68,0.888\ 9,0.333\ 3,\ 0.4)\}$,

$a_3g_1=\{(0.75,0.898\ 7,0.333\ 3,0.25),(0.71,0.893\ 3,0.666\ 7,0.75)\}$,

$a_3g_2=\{(0.91,0.895\ 8,1.00,1.00)\}$, $a_4g_2=\{(0.72,0.894\ 7,1.00,1.00)\}$,

$a_3g_3=\{(0.74,0.922\ 1,0.333\ 3,0.25),(0.76,0.924\ 1,0.333\ 3,0.35),(0.68,0.915\ 5,\ 0.333\ 3,\ 0.40)\}$,

$a_4g_3=\{(0.93,0.898\ 0,1.00,1.00)\}$, $a_5g_3=\{(0.80,0.951\ 2,1.00,1.00)\}$,

$a_4g_1=\{(0.64,0.910\ 4,0.333\ 3,0.25),(0.67,0.887\ 3,0.333\ 3,0.35),(0.70,0.866\ 7,\ 0.333\ 3,\ 0.40)\}$,

$a_5g_1=\{(0.74,0.922\ 1,0.666\ 7,0.65),(0.76,0.924\ 1,0.333\ 3,0.35)\}$,

$a_5g_2=\{(0.70,0.824\ 1,0.666\ 7,\ 0.60),(0.73,0.871\ 8,0.333\ 3,0.40)\}$.

步骤 1 用本文方法计算评审维度的外部权重 (ω_j^1)、内部权重 (ω_j^2) 与综合权重 $(\omega_j)(j=1,2,3)$ 分别为: $\omega_1^1=0.238$, $\omega_2^1=0.325$, $\omega_3^1=0.435$; $\omega_1^2=0.314$, $\omega_2^2=0.335$, $\omega_3^2=0.349\ 9$; $\omega_1=0.441\ 9$, $\omega_2=0.058\ 1$, $\omega_3=0.5$.

步骤 2 由式 (1)、式 (2) 分别计算 5 篇项目申请书在 3 个评审维度上的外部固定函数值与内部稳定函数值.

$\varphi(\tilde{h}_{11}(p_{11}))=0.663\,0,\ \varphi(\tilde{h}_{12}(p_{12}))=0.613\,6,\ \varphi(\tilde{h}_{13}(p_{13}))=0.940\,1,$
$\varphi(\tilde{h}_{21}(p_{21}))=0.945\,5,\ \varphi(\tilde{h}_{22}(p_{22}))=0.684\,0,\ \varphi(\tilde{h}_{23}(p_{23}))=0.619\,3,$
$\varphi(\tilde{h}_{31}(p_{31}))=0.690\,5,\ \varphi(\tilde{h}_{32}(p_{32}))=0.952\,7,\ \varphi(\tilde{h}_{33}(p_{33}))=0.632\,9,$
$\varphi(\tilde{h}_{41}(p_{41}))=0.605\,1,\ \varphi(\tilde{h}_{42}(p_{42}))=0.910\,9,\ \varphi(\tilde{h}_{43}(p_{43}))=0.698\,8,$
$\varphi(\tilde{h}_{51}(p_{51}))=0.698\,8,\ \varphi(\tilde{h}_{52}(p_{52}))=0.666\,5,\ \varphi(\tilde{h}_{53}(p_{53}))=0.941\,4,$
$\phi(\tilde{h}_{11}(p_{11}))=0.942\,6,\ \phi(\tilde{h}_{12}(p_{12}))=0.993\,5,\ \phi(\tilde{h}_{13}(p_{13}))=1.000\,0,$
$\phi(\tilde{h}_{21}(p_{21}))=1.000\,0,\ \phi(\tilde{h}_{22}(p_{22}))=0.967\,3,\ \phi(\tilde{h}_{23}(p_{23}))=0.995\,2,$
$\phi(\tilde{h}_{31}(p_{31}))=0.924\,2,\ \phi(\tilde{h}_{32}(p_{32}))=1.000\,0,\ \phi(\tilde{h}_{33}(p_{33}))=0.995\,5,$
$\phi(\tilde{h}_{41}(p_{41}))=0.995\,4,\ \phi(\tilde{h}_{42}(p_{42}))=1.000\,0,\ \phi(\tilde{h}_{43}(p_{43}))=1.000\,0,$
$\phi(\tilde{h}_{51}(p_{51}))=0.960\,0,\ \phi(\tilde{h}_{52}(p_{52}))=0.964\,5,\ \phi(\tilde{h}_{53}(p_{53}))=1.000\,0.$

步骤 3 利用式 (4) 计算 5 篇项目申请书的综合评审结果数值 $F(a_1)$, 5 篇项目申请书的排序结果见表 3.

表 3　参数取不同值时的排序结果

参数取值	5 篇项目申请书综合得分值	排序结果
$\alpha=1,\beta=0$	$F(a_1)=0.785\,9,\ F(a_2)=0.751\,0,\ F(a_3)$	$a_5>a_1>a_4>$
	$=0.673\,6,\ F(a_4)=0.779\,7,\ F(a_5)=0.808\,9$	$a_2>a_3$
$\alpha=2/3,\beta=1/3$	$F(a_1)=0.851\,0,\ F(a_2)=0.836\,6,\ F(a_3)$	$a_5>a_4>a_1>$
	$=0.771\,3,\ F(a_4)=0.857\,5,\ F(a_5)=0.867\,7$	$a_2>a_3$
$\alpha=1/2,\beta=1/2$	$F(a_1)=0.625\,8,\ F(a_2)=0.648\,5,\ F(a_3)$	$a_4>a_5>a_2>$
	$=0.641\,9,\ F(a_4)=0.748\,6,\ F(a_5)=0.656\,6$	$a_3>a_1$
$\alpha=1/3,\beta=2/3$	$F(a_1)=0.913\,5,\ F(a_2)=0.917\,9,\ F(a_3)$	$a_4>a_5>a_2>$
	$=0.868\,1,\ F(a_4)=0.929\,9,\ F(a_5)=0.924\,6$	$a_1>a_3$
$\alpha=0,\beta=1$	$F(a_1)=0.973\,8,\ F(a_2)=0.995\,7,\ F(a_3)$	$a_4>a_2>a_5>$
	$=0.933\,6,\ F(a_4)=0.998\,0,\ F(a_5)=0.980\,0$	$a_1>a_3$

由表 3 的排序结果可知, 若全部采用项目申请书的外部固定函数值进行排序, 则应当选取第 5 篇与第 1 篇作为立项项目. 若全部采用项目申请书的内部稳定函数值进行排序, 则应当选取第 4 篇与第 2 篇作为立项项目. 考虑到项目申请书的内部稳定函数值只能反映该项目的评审专家意见统一程度, 不能说明该项目申请书内容的质量高低, 故全部采用项目申请书的内部稳定函数值进行排序不可行 (若评审专家组认为 5 篇项目申请书的质量几乎无差别, 此时可以从评审专家组关于项目申请书的内部固定函数值的角度出发进行排序, 也可以选取参数取值为 $\alpha=0,\beta=1$). 第 4 篇项目申请书与第 1 篇项目申请书关于评审专家组的内部成员之间的评分差异值比较敏感, 敏感值介于 0 至 1/3 之间. 故选取第 5 篇、第 1 篇作为立项项目或者第 5 篇、第 4 篇作为立项项目, 需要决策者根据实际情况 (是否关注评审专家组的内部意见统一程度) 来最终确定.

5　结 论

为了在原始的 PIVHFS 决策信息中体现决策专家的重要性, 本文给予每个区间隶属度值赋予了决策专家权重, 进而定义了 WPIVHFS, 并在四维点坐标基础上建立了 WPIVHFS 新的测度范式, 通过在具体决策案例中的应用可知: 将决策专家的权重注入 PIVHFS 中是必要的; 采用四维点坐标来刻画 WPIVHFS, 并在此基础上建立的决策模型不但可以达到排序方案目的, 而且可以从多个角度来观察各方案的排序结果, 为精准地确定最优方案提供了一种有效路径; 相较于在 PIVHFS 情境下建立的决策算法, 在四维点坐标条件下建立的决策算法操作方便、计算量小, 能够快速取得方案的排序结果.

接下来的工作是进一步开展 WPIVHFS 的集成算子和加权概率犹豫模糊语言术语集的研究, 从而进一步深入开展基于加权概率犹豫模糊集多属性群决策方法研究, 并应用于解决实际决策问题, 进一步为多属性群决策的理论与方法提供新思路与新路径.

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] ZADEH L A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I[J]. Information Sciences, 1975, 8(3): 199-249.

[3] TURKSEN I B. Interval valued fuzzy sets based on normal forms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(2): 191-210.

[4] ATNASSOV K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[5] ATNASSOV K, GARGOY G. Interval-valued intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31(3): 343-349.

[6] 李香英. 区间犹豫模糊熵和区间犹豫模糊相似度[J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(19): 227-231.

[7] TORRA V. Hesitant fuzzy sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529-539.

[8] XU Z S, XIA M M. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128-2138.

[9] XU Z S, XIA M M. Hesitant fuzzy entropy and cross-entropy and their use in multi-attribute decision-making[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822.

[10] CHEN N, XU Z S, XIA M M. Correlation coefficients of hesitant fuzzy sets and their applications to clustering analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(4): 2197-2211.

[11] ZHANG H, YANG S Y. Inclusion measure for typical hesitant fuzzy sets, the relative similarity measure and fuzzy entropy[J]. Soft Computing, 2015, 20(4): 1-11.

[12] 郑婷婷, 桑小双, 马斌斌. 犹豫模糊集的 α-截集及其应用[J]. 智能系统学报, 2017, 12(3): 362-370.

[13] ZHANG X L, XU Z S. An MST cluster analysis method under hesitant fuzzy environment[J]. Control and Cybermetics, 2012, 41(3): 645-666.

[14] PENG J J, WANG J Q, WANG J, et al. An extension of ELECTRE to multi-criteria decision-making problems with multi-hesitant fuzzy sets[J]. Information Sciences, 2015, 307: 113-126.

[15] 田学东, 张凯歌, 周南, 等. 一种数学表达式检索结果相关排序算法[J]. 计算机工工程, 2017, 43(3): 204-212.

[16] ZHANG S, XU Z S, HE Y. Operation and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making[J]. Information Fusion, 2017, 3(8): 1-11.

[17] PANG Q, WANG H, XU Z S. Probabilistic linguistic term sets in multi-attribute group decision making[J]. Information Sciences, 2016, 369: 128-143.

[18] HE Y, XU Z S, JIANG W L. Probabilistic interval reference ordering sets in multi-criteria group decision making[J]. World Scientific Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2017, 25(2): 189-212.

[19] 王金凤, 程璐, 冯立杰, 等. 基于关联系数的概率区间犹豫模糊多属性决策方法[J]. 统计与决策, 2020, 36(20): 176-180.

[20] 陈惠琴, 黄韩亮. 概率区间犹豫模糊集的多属性群决策方法[J]. 辽宁工程技术大学学报(自然科学版), 2020, 39(6): 550-557.

[21] 周小领, 马庆功. 概率犹豫模糊算法及其网络舆情预测模型选择[J]. 计算机工程与应用, 2019, 55(4): 179-184+192.

[22] 朱国成. 基于概率语言术语集中考虑专家权重的决策方法研究[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2021, 47(4): 72-80.

[23] GOU X J, XU Z S, LIAO H C. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1261-1278.

责任编辑: 赵新科