路与广义 Petersen 图的直积图的 Wiener 指数*

白明鹭，田应智†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要：图 G 和 H 的直积图 $G\times H$ 是一个顶点集为 $V(G)\times V(H)$ 的图, 两点 (g_1,h_1) 和 (g_2,h_2) 是相邻的当且仅当 g_1g_2 是图 G 中的一条边, h_1h_2 是图 H 中的一条边. 连通图 G 的 Wiener 指数, 记作 $W(G)$, 是图 G 中无序点对之间的距离之和. 最后得到了路与广义 Petersen 图 $P(m,3)$ 的直积图的 Wiener 指数.

关键词： Wiener 指数; 直积; 路; 广义 Petersen 图

DOI：10.13568/j.cnki.651094.651316. 2023.04.13.0002

中图分类号：O157.5　**文献标识码**：A　**文章编号**：2096-7675(2024)02-0218-010

引文格式：白明鹭，田应智. 路与广义 Petersen 图的直积图的 Wiener 指数[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文)，2024，41(2)：218-227.

英文引文格式：BAI Minglu，TIAN Yingzhi. Wiener index of the direct product of a path and a generalized Petersen graph[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)，2024，41(2)：218-227.

Wiener Index of the Direct Product of a Path and a Generalized Petersen Graph

BAI Minglu, TIAN Yingzhi

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： For two graphs G and H, the direct product $G\times H$ is the graph with vertex set $V(G)\times V(H)$ and two vertices (g_1,h_1) and (g_2,h_2) are adjacent whenever g_1g_2 is an edge in G and h_1h_2 is an edge in H. The Wiener index of a connected graph G, denoted by $W(G)$, is the sum of the distances between all unordered pairs of vertices of G. In this paper, we obtain the Wiener index of the direct product of a path and a generalized Petersen graph $P(m,3)$.

Key words： Wiener index; direct product; paths; generalized Petersen graphs

0　引 言

本文所有涉及到的定义和符号, 参见文献 [1]. 图 G 和 H 的直积图 (也被称为 Kronecker 积, 张量积等), 记为 $G\times H$, 其顶点集为 $V(G\times H)=V(G)\times V(H)$, 两个顶点 (g_1,h_1) 和 (g_2,h_2) 相邻当且仅当 $g_1g_2\in E(G)$ 且 $h_1h_2\in E(H)$. Weichsel[2] 证明了两个非平凡的连通图 G 与 H 的直积图是连通的当且仅当 G 与 H 中至少有一个包含奇圈. 许多学者对直积进行了研究, 如吴丽芸等[3]研究了路和圈、圈和圈的直积图的超点连通性. 有关直积图的更多结果可参阅文献 [4].

连通图 G 的 Wiener 指数是指图 G 中无序点对之间的距离之和, 即 $W(G)=(1/2)\sum_{g_1,g_2\in V(G)}d_G(g_1,g_2)$. 这一指数概念由 Wiener[5] 于 1947 年提出, 在物理化学研究和通讯网络中有大量的应用. 物理化学研究中, Wiener 指数可以预测化合物的沸点, 还可以反映分子表面积对体积的比例. Wiener 指数最新的应用是合理化氯苯电解还原的机制原理, 区分富勒烯的同分异构体. 此外, 与之密切相关的另一个概念: 平均距离, 表示图中所有无序顶点对之间距离的平均值. 这一概念被用于计算机系统连通及通讯网络的分析和设计中. 总之, Wiener 指数已得到广大图论工作者的重视并被广泛研究.

由直积方法构造出的大图, 继承了因子图的优良性质. 因此研究不同类型因子图的直积图的 Wiener 指数具有理论和现实意义. 一些学者对此进行研究, 如 Hoji 等[6]确定了连通图 G 与完全图 $K_n(n\geq 3)$ 的直积图 $G\times K_n$

* 收稿日期：2023-04-13

基金项目：国家自然科学基金“点（边）-k-极大 r-一致超图的边数研究”（12261086）.

作者简介：白明鹭（1998—），女，硕士生，从事图论及其应用的研究，E-mail：bml@stu.xju.edu.cn.

† 通讯作者：田应智（1983—），男，博士，教授，主要从事图论及其应用的研究，E-mail：tianyzhxj@163.com.

的 Wiener 指数, Pattabiraman 等[7]得到连通图 G 与完全多部图 $K_{m_0,m_1,\cdots,m_{r-1}}$ 的直积图 $G\times K_{m_0,m_1,\cdots,m_{r-1}}$ 的 Wiener 指数. 在文献 [8] 中, Pattabiraman 等给出了路和圈的直积图的 Wiener 指数, 随后 Pattabiraman 得到了一个偶圈和一个奇圈, 以及两个奇圈的直积图的 Wiener 指数[9].

本文在现有基础上研究路和一类广义 Petersen 图 $P(m,3)$ 的直积图的 Wiener 指数. 广义 Petersen 图由 Coxeter[10] 于 1950 年引入, 是一类重要且被广泛研究的图类[11]. 本文主要结合路与广义 Petersen 图 $P(m,3)$ 的特性, 利用理论计算的方法研究并得出其直积图的 Wiener 指数, 得到的 Wiener 指数仅需要用两个因子图的阶数就可表示出来. 本文的研究为后续计算路和一般的广义 Petersen 图 $P(m,a)$ 的 Wiener 指数提供了研究思路.

1 预备知识

广义 Petersen 图, 记为 $G=P(m,a)$, 其顶点集为 $V(G)=U\cup W$, 其中 $U=\{u_0,u_1,\cdots,u_{m-1}\}$ 为外圈点集, $W=\{w_0,w_1,\cdots,w_{m-1}\}$ 为内圈点集; 其边集为 $E(G)=\{u_iw_i,u_iu_{i+1},w_iw_{i+a}|0\le i\le m-1\}$, 其中下标取模 m 运算且 $m\ge 5$, $0<a<m$. 当 $m=5$, $a=2$ 时, 广义 Petersen 图 $P(m,a)$ 就是著名的 Petersen 图.

对于 G 中的两个顶点 g_1 和 g_2, $d_G(g_1,g_2)$ 是点 g_1 和 g_2 之间的距离. 图 G 中连接 g_1 和 g_2 的最短奇途径的长度, 记为 $od_G(g_1,g_2)$; 图 G 中连接 g_1 和 g_2 的最短偶途径的长度, 记为 $ed_G(g_1,g_2)$. 如果在图 G 中 g_1 和 g_2 之间没有奇长或偶长的途径, 则我们认为 $od_G(g_1,g_2)=\infty$ 或 $ed_G(g_1,g_2)=\infty$. 若无歧义, 可删除 $d_G(g_1,g_2)$, $od_G(g_1,g_2)$, $ed_G(g_1,g_2)$ 中的下标 G.

设 P_r 是阶数为 r 的路, 其点集为 $V(P_r)=\{x_0,x_1,\cdots,x_{r-1}\}$. 我们记 $X_i=x_i\times V(P(m,a))$, $i=0,1,\cdots,r-1$, 称 X_i 为 $P_r\times P(m,a)$ 的第 i 层. 将点 (x_i,u_j) 和点 (x_i,w_j) 分别简记为 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$, 则 X_i 中的点为 $\{x_{i,j},y_{i,j}|0\le j\le m-1\}$. 因此, 我们很容易得到 $V(P_r\times P(m,a))=V(P_r)\times V(P(m,a))=\cup_{i=0}^{r-1}X_i$.

引理 1[12] 对于图 G 和 H 的直积图 $G\times H$, 它的两个顶点 (g_1,h_1) 和 (g_2,h_2) 间距离为 $d_{G\times H}((g_1,h_1),(g_2,h_2))=\min\{\max\{od_G(g_1,g_2),od_H(h_1,h_2)\},\max\{ed_G(g_1,g_2),ed_H(h_1,h_2)\}\}$.

接下来, 我们想要确定广义 Petersen 图 $P(m,3)$ 中任意两个顶点间的最短奇(偶)途径的长度. 若 m 是偶数, 则 $P(m,3)$ 不含奇圈, $P_n\times P(m,3)$ 不连通. 所以我们仅考虑 m 为奇数的情况. 由 $P(m,3)$ 的定义和旋转对称性的特殊结构, 可将点 u_j 固定在点 u_0, 点 w_j 固定在点 w_0. 因此, 我们不需要计算任意两个顶点间的最短奇(偶)途径的长度, 仅需计算 u_0 和 w_0 到每个顶点间的最短奇(偶)途径的长度. 又因为 $P(m,3)$ 是关于 u_0 和 w_0 对称的, 故仅考虑 u_0 和 w_0 到点 $\{u_j,w_j|0\le j\le\lfloor m/2\rfloor\}$ 的最短奇(偶)途径的长度 (u_0 和 w_0 到点 $\{u_{m-j},w_{m-j}|0\le j\le\lfloor m/2\rfloor\}$ 的最短奇(偶)途径的长度证明类似).

引理 2 设 m 是一个正奇数且 $m\equiv 0 \bmod (3)$, $P(m,3)$ 是一个广义 Petersen 图, 其点集为 $U\cup W$, $U=\{u_0,u_1,\cdots,u_{m-1}\}$, $W=\{w_0,w_1,\cdots,w_{m-1}\}$, 则除了 $od(u_0,u_1)=1$, $ed(u_0,u_2)=2$, 从点 u_0 和点 w_0 到点 $\{u_j,w_j|0\le j\le\lfloor m/2\rfloor\}$ 的最短奇(偶)途径的长度为

$$od(u_0,u_j)=\begin{cases}\frac{j}{3}+2, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\frac{j}{3}+2, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是偶的}\\ \frac{m}{3}-\lfloor\frac{j}{3}\rfloor+3, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是奇的}\\ \lfloor\frac{j}{3}\rfloor+3, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是偶的}\\ \frac{m}{3}-\lceil\frac{j}{3}\rceil+3, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是奇的}\\ \lceil\frac{j}{3}\rceil+3, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是偶的}\end{cases} \tag{1}$$

$$ed(u_0,u_j)=\begin{cases}\frac{m}{3}-\frac{j}{3}+2, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是奇的}\\ \frac{j}{3}+2, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是偶的}\\ \lfloor\frac{j}{3}\rfloor+3, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\lfloor\frac{j}{3}\rfloor+3, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是偶的}\\ \lceil\frac{j}{3}\rceil+3, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\lceil\frac{j}{3}\rceil+3, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是偶的}\end{cases} \tag{2}$$

$$od(u_0,w_j)=od(w_0,u_j)=\begin{cases}\frac{m}{3}-\frac{j}{3}+1, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是奇的}\\ \frac{j}{3}+1, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是偶的}\\ \lfloor\frac{j}{3}\rfloor+2, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\lfloor\frac{j}{3}\rfloor+2, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是偶的}\\ \lceil\frac{j}{3}\rceil+2, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\lceil\frac{j}{3}\rceil+2, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是偶的}\end{cases} \tag{3}$$

$$ed(u_0,w_j)=ed(w_0,u_j)=\begin{cases}\frac{j}{3}+1, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\frac{j}{3}+1, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是偶的}\\ \frac{m}{3}-\lfloor\frac{j}{3}\rfloor+2, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是奇的}\\ \lfloor\frac{j}{3}\rfloor+2, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是偶的}\\ \frac{m}{3}-\lceil\frac{j}{3}\rceil+2, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是奇的}\\ \lceil\frac{j}{3}\rceil+2, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是偶的}\end{cases} \tag{4}$$

$$od(w_0,w_j)=\begin{cases}\frac{j}{3}, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\frac{j}{3}, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是偶的}\\ \frac{m}{3}-\lfloor\frac{j}{3}\rfloor+3, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是奇的}\\ \lfloor\frac{j}{3}\rfloor+3, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是偶的}\\ \frac{m}{3}-\lceil\frac{j}{3}\rceil+3, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是奇的}\\ \lceil\frac{j}{3}\rceil+3, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是偶的}\end{cases} \tag{5}$$

$$ed(w_0,w_j)=\begin{cases}\frac{m}{3}-\frac{j}{3}, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是奇的}\\ \frac{j}{3}, & j\equiv 0 \bmod (3), \frac{j}{3}\text{ 是偶的}\\ \lfloor\frac{j}{3}\rfloor+3, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\lfloor\frac{j}{3}\rfloor+3, & j\equiv 1 \bmod (3), \lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是偶的}\\ \lceil\frac{j}{3}\rceil+3, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是奇的}\\ \frac{m}{3}-\lceil\frac{j}{3}\rceil+3, & j\equiv 2 \bmod (3), \lceil\frac{j}{3}\rceil\text{ 是偶的}\end{cases} \tag{6}$$

证明 当 $m\equiv 0 \bmod (3)$, 内圈点导出的子图为 3 个长度均为 $m/3$ 的圈的集合.

首先计算点 u_0 到点 u_j 的最短奇、偶途径的长度. 若 $j\equiv 0 \bmod (3)$, 点 u_0 沿着对应边 u_0w_0, 然后通过内圈边捷径到达点 w_j, 再沿着对应边 w_ju_j 到达点 u_j, 则存在两条奇偶性不同且长度分别为 $(j/3)+2$ 和 $(m/3)-(j/3)+2$ 的 u_0u_j 途径. 若 $j\equiv 1 \bmod (3)$, 点 u_0 需要先到达点 $w_{3\lfloor j/3\rfloor}$, 再沿着对应边 $u_{3\lfloor j/3\rfloor}w_{3\lfloor j/3\rfloor}$ 和外圈边 $u_{3\lfloor j/3\rfloor}u_j$ 到达点 u_j, 则存在两条奇偶性不同且长度分别为 $\lfloor j/3\rfloor+3$ 和 $(m/3)-\lfloor j/3\rfloor+3$ 的 u_0u_j 途径. 若 $j\equiv 2 \bmod (3)$, 点 u_0 需要先到达点 $w_{3\lceil j/3\rceil}$, 再沿着对应边 $u_{3\lceil j/3\rceil}w_{3\lceil j/3\rceil}$ 和外圈边 $u_{3\lceil j/3\rceil}u_j$ 到达点 u_j, 则存在两条奇偶性不同且长度分别为 $\lceil j/3\rceil+3$ 和 $(m/3)-\lceil j/3\rceil+3$ 的 u_0u_j 途径. 必须注意特殊情况: $od(u_0,u_1)=d(u_0,u_1)=1$ 和 $ed(u_0,u_2)=d(u_0,u_2)=2$.

接下来, 计算点 w_0 到点 w_j 的最短奇、偶途径的长度. 若 $j\equiv 0 \bmod (3)$, 点 w_0 沿着内圈边到达点 w_j, 则存在两条奇偶性不同且长度分别为 $j/3$ 和 $(m/3)-(j/3)$ 的 w_0w_j 途径. 若 $j\equiv 1 \bmod (3)$, 点 w_0 需要先沿着内圈边到达点 $w_{3\lfloor j/3\rfloor}$, 再沿着两条对应边 $u_{3\lfloor j/3\rfloor}w_{3\lfloor j/3\rfloor}$, u_jw_j 和外圈边 $u_{3\lfloor j/3\rfloor}u_j$ 到达点 w_j, 则存在两条奇偶性不同且长度分别为 $\lfloor j/3\rfloor+3$ 和 $(m/3)-\lfloor j/3\rfloor+3$ 的 w_0w_j 途径. 若 $j\equiv 2 \bmod (3)$, 点 w_0 需要先沿着内圈边到达点 $w_{3\lceil j/3\rceil}$, 再沿着两条对应边 $u_{3\lceil j/3\rceil}w_{3\lceil j/3\rceil}, u_jw_j$ 和外圈边 $u_{3\lceil j/3\rceil}u_j$ 到达点 w_j, 则存在两条奇偶性不同且长度分别为 $\lceil j/3\rceil+3$ 和 $(m/3)-\lceil j/3\rceil+3$ 的 w_0w_j 途径.

现在研究两个点在不同的圈中的情形, 即点 u_0 到点 w_j 和点 w_0 到点 u_j. 对于点 u_0 到点 w_j, 证明与 u_0 到 u_j 的情况类似, 只是不需要对应边 u_jw_j 或 $u_{3\lfloor j/3\rfloor}w_{3\lfloor j/3\rfloor}$ 或 $u_{3\lceil j/3\rceil}w_{3\lceil j/3\rceil}$. 对于点 w_0 到点 u_j, 可以用类似的方法进行推导.

由于广义 Petersen 图 $P(m,3)$ 的特殊结构, 上面构造的奇、偶途径都是最短的.

2 主要结果

定理 1 设 m 是正奇数且 $m\equiv 0 \bmod (3)$, n 是正整数, 则 $G=P_{2n}\times P(m,3)$ 的 Wiener 指数为

(i) $W(G)=(4m^3n^2/3)+16m^2n^2+(8n^4-32n^3+50n^2-56n+20)m$, $1\le n\le (m/6)+(1/2)$;

(ii) $W(G)=-(m^5/162)+((4n/27)-(4/27))m^4+((8n/3)-(25/18))m^3+((16/3)n^3+(50/3)n-(17/3))m^2+(-22n+12)m$, $n\ge (m/6)+(3/2)$.

证明 记 P_{2n} 的点为 $\{x_i|0\le i\le 2n-1\}$, $P(m,3)$ 的点为 $\{u_j,w_j|0\le j\le m-1\}$, 则直积图 $G=P_{2n}\times P(m,3)$ 的点记为 $\{x_{i,j},y_{i,j}|0\le i\le 2n-1,0\le j\le m-1\}$, 其中 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$ 分别表示点 (x_i,u_j) 和点 (x_i,w_j). 记 $S_{k,j}$ 表示点 $x_{k,j}$ 到图 G 其余所有点的距离之和, $S'_{k,j}$ 表示点 $y_{k,j}$ 到图 G 其余所有点的距离之和, 即 $S_{k,j}=\sum_{v\in V(G)}d_G(x_{k,j},v)$, $S'_{k,j}=\sum_{v\in V(G)}d_G(y_{k,j},v)$. 由于 $P(m,3)$ 的定义及其旋转对称性的特殊结构, 使得 $S_{k,j}=S_{k,l}$, $S'_{k,j}=S'_{k,l}$. 所以, 我们仅需计算 $S_{k,0}$ 和 $S'_{k,0}$ 对于 $k=0,1,\cdots,2n-1$, 再将计算结果乘以 m 即可求得 $\sum_{j=0}^{m-1}S_{k,j}$ 与 $\sum_{j=0}^{m-1}S'_{k,j}$. 由于 G 存在对称性, 所以

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S_{k,j}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S_{2n-(k+1),j},\ \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S'_{k,j}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S'_{2n-(k+1),j},$$

从而

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S_{k,j}=2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S_{k,j},\ \sum_{k=0}^{2n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S'_{k,j}=2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S'_{k,j}.$$

因此, $W(G)$ 可用下面的形式表示, 即

$$W(G)=m(\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}+\sum_{k=0}^{n-1}S'_{k,0}) \tag{7}$$

所以证明的重点是计算 $\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}$ 和 $\sum_{k=0}^{n-1}S'_{k,0}$. 对于 $\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}$($\sum_{k=0}^{n-1}S'_{k,0}$ 以同样的方式进行计算), 我们划分 G 的点集 $V(G)=\cup_{i=0}^{2n-1}X_i$ 为 $\cup_{i=0}^{k}X_i$ 和 $\cup_{i=k+1}^{2n-1}X_i$, 并单独计算.

对于每个 k 与 i, $\sum\limits_{v\in X_i}d_G(x_{k,0},v)$ 满足下面的式子.

$$\begin{aligned}\sum_{v\in X_i}d_G(x_{k,0},v)&=\sum_{j=0}^{m-1}d_G(x_{k,0},x_{i,j})+\sum_{j=0}^{m-1}d_G(x_{k,0},y_{i,j})\\&=2(\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}d_G(x_{k,0},x_{i,j})+\sum_{j=1}^{\frac{m-1}{2}}d_G(x_{k,0},y_{i,j}))+d_G(x_{k,0},x_{i,0})+d_G(x_{k,0},y_{i,0}).\end{aligned}$$

接着, 对于固定的 k 和 i, 要计算点 $x_{k,0}$ 到图 G 的第 i 层 X_i 中所有点的距离和, 即求 $\sum_{v\in X_i}d_G(x_{k,0},v)$. 我们仅考虑 $(m/6)-(1/2)$ 是奇数的情形, 即 $m=9,21,33,\cdots$. ($(m/6)-(1/2)$ 是偶数的情形, 即 $m=15,27,39,\cdots$ 可同样证明) 而由 $|k-i|$ 的奇偶性, 我们分以下两种情形计算.

情形 1 $|k-i|$ 是偶数.

在情形 1 中, 需要寻找从点 u_0 到点 u_j 和点 w_j $(0\le j\le \lfloor m/2\rfloor)$ 的最短偶途径, 如式 (2) 和式 (4) 所示. 由引理 1, 有 $d(x_{k,0},x_{i,j})=\max\{|k-i|,ed(u_0,u_j)\}$, $d(x_{k,0},y_{i,j})=\max\{|k-i|,ed(u_0,w_j)\}$. 由引理 2, 可根据 j 的值, 分以下六种情形来讨论 $d_G(x_{k,0},x_{i,j})$ 和 $d_G(x_{k,0},y_{i,j})$.

1) $j\equiv 0 \bmod (3)$ 且 $j/3$ 是奇的, 即 $j/3=1,3,\cdots,(m/6)-(1/2)$ $(j=3,9,\cdots,(m/2)-(3/2))$. 因此 $ed(u_0,u_j)=(m/3)-(j/3)+2=(m/6)+(5/2),(m/6)+(9/2),\cdots,(m/3)+1$; $ed(u_0,w_j)=(j/3)+1=2,4,\cdots,(m/6)+(1/2)$, 所以可计算点 $x_{k,0}$ 到第 i 层符合 j 条件的点的距离和, 即

$$\sum_{\substack{\frac{j}{3}\text{ 是奇的},\\ 1\le\frac{j}{3}\le\frac{m}{6}-\frac{1}{2}}}d_G(x_{k,0},x_{i,j})=\begin{cases}(\frac{m}{6}+\frac{5}{2})+(\frac{m}{6}+\frac{9}{2})+\cdots+(\frac{m}{3}+1), & |k-i|<\frac{m}{6}+\frac{5}{2}\\ |k-i|\times(\frac{|k-i|-(\frac{m}{6}+\frac{5}{2})}{2}+1)+(|k-i|+2) & \\ +(|k-i|+4)+\cdots+(\frac{m}{3}+1), & \frac{m}{6}+\frac{5}{2}\le|k-i|\le\frac{m}{3}+1\\ |k-i|\times(\frac{m}{12}+\frac{1}{4}), & |k-i|>\frac{m}{3}+1\end{cases} \tag{8}$$

$$\sum_{\substack{\frac{j}{3}\text{ 是奇的}\\ 1\le\frac{j}{3}\le\frac{m}{6}-\frac{1}{2}}} d_G(x_{k,0},y_{i,j})=\begin{cases}2+4+\cdots+(\frac{m}{6}+\frac{1}{2}), & |k-i|=0\\ |k-i|\times(\frac{|k-i|-2}{2}+1)+(|k-i|+2)\\ +(|k-i|+4)+\cdots+(\frac{m}{6}+\frac{1}{2}), & 2\le|k-i|\le\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\\ |k-i|\times(\frac{m}{12}+\frac{1}{4}), & |k-i|>\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\end{cases} \tag{9}$$

式 (8) 的解释如下: 当 $|k-i|<(m/6)+(5/2)$ 时, $d_G(x_{k,0},x_{i,j})=ed(u_0,u_j)=(m/3)-(j/3)+2$, 则从点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,3},x_{i,9},\cdots,x_{i,(m/2)-(3/2)}$ 的距离和为 $((m/6)+(5/2))+((m/6)+(9/2))+\cdots+((m/3)+1)$. 当 $(m/6)+(5/2)\le|k-i|\le(m/3)+1$ 时, $d_G(x_{k,0},x_{i,j})=\max\{|k-i|,ed(u_0,u_j)\}$, 则从点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,3},x_{i,9},\cdots,x_{i,(m-3)/2}$ 的距离和为 $|k-i|\times((|k-i|-((m/6)+(5/2))/2)+1)+(|k-i|+2)+(|k-i|+4)+\cdots+((m/3)+1)$, 其中点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,m-3|k-i|+6},x_{i,m-3|k-i|+12},\cdots,x_{i,(m/2)-(3/2)}$ 的距离为 $|k-i|$; 到点 $x_{i,3},x_{i,9},\cdots,x_{i,m-3|k-i|}$ 的距离为 $|k-i|+2,|k-i|+4,\cdots,(m/3)+1$. 当 $|k-i|>(m/3)+1$ 时, $d(x_{k,0},x_{i,j})=|k-i|$, 则从点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,3},x_{i,9},\cdots,x_{i,(m/2)-(3/2)}$ 的距离和为 $|k-i|\times((m/12)+(1/4))$.

对于式 (9), 点 $x_{k,0}$ 到点 $y_{i,3},y_{i,9},\cdots,y_{i,(m/2)-(3/2)}$ 距离的选择与上面的论述类似, 不再赘述. 下面论述点 $x_{k,0}$ 到不同类型 j 的点 $x_{i,j}$ 与点 $y_{i,j}$ 的距离, 其距离的选择与上面的论述类似, 因此不再赘述, 将直接给出结果.

2) $j\equiv 0 \bmod (3)$ 且 $j/3$ 是偶的, 即 $j/3=2,4,\cdots,(m/6)-(3/2)$ $(j=6,12,\cdots,(m/2)-(9/2))$. 因此 $ed(u_0,u_j)=(j/3)+2=4,6,\cdots,(m/6)+(1/2)$, $ed(u_0,w_j)=(m/3)-(j/3)+1=(m/6)+(5/2),(m/6)+(9/2),\cdots,(m/3)-1$. (注意 $j/3=0$ 的情形也符合这一规律, 但是为了之后计算方便, 这种情况被单独考虑) 所以可计算点 $x_{k,0}$ 到第 i 层符合 j 条件的点的距离和, 即

$$\sum_{\substack{\frac{j}{3}\text{ 是偶的}\\ 2\le\frac{j}{3}\le\frac{m}{6}-\frac{3}{2}}} d_G(x_{k,0},x_{i,j})=\begin{cases}4+6+\cdots+(\frac{m}{6}+\frac{1}{2}), & |k-i|<4\\ |k-i|\times(\frac{(|k-i|-2)}{2}+1)+(|k-i|+2)\\ +(|k-i|+4)+\cdots+(\frac{m}{6}+\frac{1}{2}), & 4\le|k-i|\le\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\\ |k-i|\times(\frac{m}{12}-\frac{3}{4}), & |k-i|>\frac{m}{6}+\frac{1}{2}\end{cases} \tag{10}$$

$$\sum_{\substack{\frac{j}{3}\text{ 是偶的}\\ 2\le\frac{j}{3}\le\frac{m}{6}-\frac{3}{2}}} d_G(x_{k,0},y_{i,j})=\begin{cases}(\frac{m}{6}+\frac{5}{2})+(\frac{m}{6}+\frac{9}{2})+\cdots+(\frac{m}{3}-1), & |k-i|<\frac{m}{6}+\frac{5}{2}\\ |k-i|\times(\frac{(|k-i|-(\frac{m}{6}+\frac{5}{2}))}{2}+1)+(|k-i|+2)\\ +(|k-i|+4)+\cdots+(\frac{m}{3}-1), & \frac{m}{6}+\frac{5}{2}\le|k-i|\le\frac{m}{3}-1\\ |k-i|\times(\frac{m}{12}-\frac{3}{4}), & |k-i|>\frac{m}{3}-1\end{cases} \tag{11}$$

$$d_G(x_{k,0},x_{i,0})+d_G(x_{k,0},y_{i,0})=\begin{cases}|k-i|+(\frac{m}{3}+1), & 0\le|k-i|\le\frac{m}{3}+1\\ 2|k-i|, & |k-i|>\frac{m}{3}+1\end{cases} \tag{12}$$

对于式 (10) 和 (11), 分别得到了从点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,6},x_{i,12},\cdots,x_{i,(m/2)-(9/2)}$ 和点 $y_{i,6},y_{i,12},\cdots,y_{i,(m/2)-(9/2)}$ 的距离和, 而式 (12) 是点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,0}$ 与点 $y_{i,0}$ 的距离和.

3) $j\equiv 1 \bmod (3)$ 且 $\lfloor j/3\rfloor$ 是奇的, 即 $\lfloor j/3\rfloor=1,3,\cdots,(m/6)-(1/2)$ $(j=4,10,\cdots,(m/2)-(1/2))$. 因此 $ed(u_0,u_j)=\lfloor j/3\rfloor+3=4,6,\cdots,(m/6)+(5/2)$, $ed(u_0,w_j)=(m/3)-\lfloor j/3\rfloor+2=(m/6)+(5/2),(m/6)+(9/2),\cdots,(m/3)+1$. 所以可计算点 $x_{k,0}$ 到第 i 层符合 j 条件的点的距离和, 即

$$\sum_{\substack{\lfloor\frac{j}{3}\rfloor\text{ 是奇的}\\ 1\le\lfloor\frac{j}{3}\rfloor\le\frac{m}{6}-\frac{1}{2}}} d_G(x_{k,0},x_{i,j})=\begin{cases}4+6+\cdots+(\frac{m}{6}+\frac{5}{2}), & |k-i|<4\\ |k-i|\times(\frac{|k-i|-4}{2}+1)+(|k-i|+2)\\ +(|k-i|+4)+\cdots+(\frac{m}{6}+\frac{5}{2}), & 4\le|k-i|\le\frac{m}{6}+\frac{5}{2}\\ |k-i|\times(\frac{m}{12}+\frac{1}{4}), & |k-i|>\frac{m}{6}+\frac{5}{2}\end{cases} \tag{13}$$

式 (13) 是点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,4},x_{i,10},\cdots,x_{i,(m/2)-(1/2)}$ 的距离和, 而点 $x_{k,0}$ 到点 $y_{i,4},y_{i,10},\cdots,y_{i,(m/2)-(1/2)}$ 的距离和的表达式与式 (8) 相同.

4) $j\equiv 1 \bmod (3)$ 且 $\lfloor j/3\rfloor$ 是偶的, 即 $\lfloor j/3\rfloor=0,2,\cdots,(m/6)-(3/2)$ $(j=1,7,\cdots,(m/2)-(7/2))$. 因此 $ed(u_0,u_j)=(m/3)-\lfloor j/3\rfloor+3=(m/6)+(9/2),(m/6)+(13/2),\cdots,(m/3)+3$, $ed(u_0,w_j)=\lfloor j/3\rfloor+2=2,4,\cdots,(m/6)+(1/2)$. 所以可计算点 $x_{k,0}$ 到第 i 层符合 j 条件的点的距离和, 即

$$\sum_{\substack{\lfloor \frac{j}{3}\rfloor \text{ 是偶的} \\ 0\le \lfloor \frac{j}{3}\rfloor \le \frac{m}{6}-\frac{3}{2}}} d_G(x_{k,0},x_{i,j})=\begin{cases} (\frac{m}{6}+\frac{9}{2})+(\frac{m}{6}+\frac{13}{2})+\cdots+(\frac{m}{3}+3), & |k-i|<\frac{m}{6}+\frac{9}{2} \\ |k-i|\times(\frac{|k-i|-(\frac{m}{6}+\frac{9}{2})}{2}+1)+(|k-i|+2) & \\ +(|k-i|+4)+\cdots+(\frac{m}{3}+3), & \frac{m}{6}+\frac{9}{2}\le|k-i|\le\frac{m}{3}+3 \\ |k-i|\times(\frac{m}{12}+\frac{1}{4}), & |k-i|>\frac{m}{3}+3 \end{cases} \tag{14}$$

式 (14) 是点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,1},x_{i,7},\cdots,x_{i,(m/2)-(7/2)}$ 的距离和, 而点 $x_{k,0}$ 到点 $y_{i,1},y_{i,7},\cdots,y_{i,(m/2)-(7/2)}$ 的距离和的表达式与式 (9) 相同.

5) $j\equiv 2 \bmod (3)$ 且 $\lceil j/3\rceil$ 是奇的, 即 $\lceil j/3\rceil=1,3,\cdots,(m/6)-(1/2)$ $(j=2,8,\cdots,(m/2)-(5/2))$. 除了特殊情况当 $\lceil j/3\rceil=1$ 时, 有 $e(u_0,u_2)=2$; 其余当 $\lceil j/3\rceil>1$ 时, 有 $ed(u_0,u_j)=\lceil j/3\rceil+3=6,8,\cdots,(m/6)+(5/2)$, $ed(u_0,w_j)=(m/3)-\lceil j/3\rceil+2=(m/6)+(5/2),(m/6)+(9/2),\cdots,(m/3)+1$. 所以可计算点 $x_{k,0}$ 到第 i 层符合 j 条件的点的距离和, 即

$$\sum_{\substack{\lceil \frac{j}{3}\rceil \text{ 是奇的} \\ 1\le \lceil \frac{j}{3}\rceil \le \frac{m}{6}-\frac{1}{2}}} d_G(x_{k,0},x_{i,j})=\begin{cases} 2+(6+8+\cdots+(\frac{m}{6}+\frac{5}{2})), & |k-i|<4 \\ |k-i|+(|k-i|\times(\frac{|k-i|-6}{2}+1)+(|k-i|+2) & \\ +(|k-i|+4)+\cdots+(\frac{m}{6}+\frac{5}{2})), & 4\le|k-i|\le\frac{m}{6}+\frac{5}{2} \\ |k-i|\times(\frac{m}{12}+\frac{1}{4}), & |k-i|>\frac{m}{6}+\frac{5}{2} \end{cases} \tag{15}$$

式 (15) 是点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,2},x_{i,8},\cdots,x_{i,(m/2)-(5/2)}$ 的距离和, 而点 $x_{k,0}$ 到点 $y_{i,2},y_{i,8},\cdots,y_{i,(m/2)-(5/2)}$ 的距离和的结果与式 (8) 相同.

6) $j\equiv 2 \bmod (3)$ 且 $\lceil j/3\rceil$ 是偶的, 即 $\lceil j/3\rceil=2,4,\cdots,(m/6)-(3/2)$ $(j=5,11,\cdots,(m/2)-(11/2))$. 因此 $ed(u_0,u_j)=(m/3)-\lceil j/3\rceil+3=(m/6)+(9/2),(m/6)+(13/2),\cdots,(m/3)+1$, $ed(u_0,w_j)=\lceil j/3\rceil+2=4,6,\cdots,(m/6)+(1/2)$. 此时可计算点 $x_{k,0}$ 到第 i 层符合 j 条件的点的距离和, 即

$$\sum_{\substack{\lceil \frac{j}{3}\rceil \text{ 是偶的} \\ 0\le \lceil \frac{j}{3}\rceil \le \frac{m}{6}-\frac{3}{2}}} d_G(x_{k,0},x_{i,j})=\begin{cases} (\frac{m}{6}+\frac{9}{2})+(\frac{m}{6}+\frac{13}{2})+\cdots+(\frac{m}{3}+1), & |k-i|<\frac{m}{6}+\frac{9}{2} \\ |k-i|\times(\frac{|k-i|-(\frac{m}{6}+\frac{9}{2})}{2}+1)+(|k-i|+2) & \\ +(|k-i|+4)+\cdots+(\frac{m}{3}+1), & \frac{m}{6}+\frac{9}{2}\le|k-i|\le\frac{m}{3}+1 \\ |k-i|\times(\frac{m}{12}-\frac{3}{4}), & |k-i|>\frac{m}{3}+1 \end{cases} \tag{16}$$

式 (16) 是点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,5},x_{i,11},\cdots,x_{i,(m/2)-(11/2)}$ 的距离和, 而点 $x_{k,0}$ 到点 $y_{i,5},y_{i,11},\cdots,y_{i,(m/2)-(11/2)}$ 的距离和的表达式与式 (10) 相同.

于是, 我们按 $(j/3),\lfloor j/3\rfloor$ 和 $\lceil j/3\rceil$ 的奇偶性进行分类分别得到点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$ 的距离和. 接下来, 我们求点 $x_{k,0}$ 到第 i 层所有点的距离和, 即 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)$. 下面我们分三种子情形计算.

子情形 1.1 当 $|k-i|=0$ 或 2 时, 有 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)=|k-i|+(m^2/3)+(13/3)m-6$.

子情形 1.2 当 $4\le|k-i|\le(m/3)+1$ 时, 有 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)=3|k-i|^2-13|k-i|+(m^2/3)+(13/3)m+14$.

子情形 1.3 当 $|k-i|>(m/3)+1$ 时, 有 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)=2m|k-i|$.

情形 2 $|k-i|$ 是奇数.

在情形 2 中, 需要寻找从点 u_0 到点 u_j 和点 w_j $(0\le j\le\lfloor m/2\rfloor)$ 的最短奇途径, 如式 (1) 和式 (3) 所示. 由引理 1 可知 $d(x_{k,0},x_{i,j})=\max\{|k-i|,od(u_0,u_j)\}$ 和 $d(x_{k,0},y_{i,j})=\max\{|k-i|,od(u_0,w_j)\}$. 故使用与 $|k-i|$ 是偶数情形相同的方法, 可以分别得到六种情形下点 $x_{k,0}$ 到点 $x_{i,j}$ 和 $y_{i,j}$ 的距离和, 从而可以计算出点 $x_{k,0}$ 到第 i 层所有点的距离和 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)$, 下面直接给出 $|k-i|$ 是奇数时 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)$ 的结果.

子情形 2.1 当 $|k-i|=1$ 时, 有 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)=(1/3)m^2+(13/3)m-4$.

子情形 2.2 当 $3\le|k-i|\le(m/3)$ 时, 有 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)=3|k-i|^2-13|k-i|+(1/3)m^2+(13/3)m+14$.

子情形 2.3 当 $|k-i|>(m/3)$ 时, 有 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)=2m|k-i|$.

此时我们已经得到了从顶点 $x_{k,0}$ 到第 i 层 X_i 中所有点的距离之和, 即 $\sum_{v\in X_i} d_G(x_{k,0},v)$. 接下来, 我们将分别计算点 $x_{k,0}$ 到 $\cup_{i=0}^{k}X_i$ 和 $\cup_{i=k+1}^{2n-1}X_i$ 这两部分所有点的距离和.

对于计算 $\sum\limits_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k.}} d_G(x_{k,0},v)$, 我们分下面四种情形考虑.

(I) $k=0$. $\sum\limits_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k}} d_G(x_{k,0},v)=\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-6$.

(II) $k=1$. $\sum\limits_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k}} d_G(x_{k,0},v)=\frac{2}{3}m^2+\frac{26}{3}m-10$.

(III) $2\le k\le (m/3)$.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k}} d_G(x_{k,0},v)&=(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-6)+2(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-4)\\&\quad+\sum_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k-3}}(3i^2+(-6k+13)i+3k^2-13k+\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+14)\\&=k^3-5k^2+(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+8)k+\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-18.\end{aligned}$$

(IV) $k\ge (m/3)+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k}} d_G(x_{k,0},v)&=(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-6)+2(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-4)\\&\quad+\sum_{\substack{v\in X_i,\\ k-(\frac{m}{3}+1)\le i\le k-3}}(3i^2+(-6k+13)i+3k^2-13k+\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+14)\\&\quad+\sum_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k-(\frac{m}{3}+2)}}(-2mi+2km)\\&=mk^2+mk+\frac{1}{27}m^3+\frac{8}{9}m^2+7m-14.\end{aligned}$$

对于计算 $\sum\limits_{\substack{v\in X_i,\\ k+1\le i\le 2n-1}} d_G(x_{k,0},v)$, 我们考虑下面三种情形.

(V) $k\le -(m/3)+2n-2$.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{v\in X_i,\\ k+1\le i\le 2n-1}} d_G(x_{k,0},v)&=2(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-4)\\&\quad+\sum_{\substack{v\in X_i,\\ k+3\le i\le k+\frac{m}{3}+1}}(3i^2+(-6k-13)i+3k^2-13k+\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+14)\\&\quad+\sum_{\substack{v\in X_i,\\ k+\frac{m}{3}+2\le i\le 2n-1}}(2mi-2km)\\&=mk^2+(-4nm+m)k+\frac{1}{27}m^3+\frac{5}{9}m^2+(4n^2-2n+\frac{8}{3})m-8.\end{aligned}$$

(VI) $-(m/3)+2n-1\le k\le 2n-3$.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{v\in X_i,\\ k+1\le i\le 2n-1}} d_G(x_{k,0},v)&=2(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-4)\\ &+\sum_{\substack{v\in X_i,\\ k+3\le i\le 2n-1}}(3i^2+(-6k-13)i+3k^2-13k+\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+14)\\ &=-k^3+(6n-8)k^2+(-\frac{1}{3}m^2-\frac{13}{3}m-12n^2+32n-21)k\\ &+(\frac{2}{3}n-\frac{1}{3})m^2+(\frac{26}{3}n-\frac{13}{3})m+8n^3-32n^2+42n-26.\end{aligned}$$

(VII) $k=2n-2$. $\sum\limits_{\substack{v\in X_i,\\ k+1\le i\le 2n-1}} d_G(x_{k,0},v)=\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}(m-4)$.

根据 (I)~(VII), 按 n 的取值进行分类, 得到 $\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}$ 的表达式如下

当 $n=1$ 时, 有 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}S_{k,0}=(2/3)m^2+(26/3)m-10$.

当 $2\le n\le(m/6)+(1/2)$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k}} d_G(x_{k,0},v)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{v\in X_i,\\ k+1\le i\le 2n-1}} d_G(x_{k,0},v)\\ &=(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-6)+(\frac{2}{3}m^2+\frac{26}{3}m-10)+\sum_{k=2}^{n-1}(k^3-5k^2+(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+8)k+\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-18)\\ &+\sum_{k=0}^{n-1}(-k^3+(6n-8)k^2-(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+12n^2-32n+21)k+(\frac{2}{3}n-\frac{1}{3})m^2+(\frac{26}{3}n-\frac{13}{3})m\\ &+8n^3-32n^2+42n-26)\\ &=\frac{2}{3}m^2n^2+\frac{26}{3}mn^2+4n^4-\frac{52}{3}n^3+27n^2-\frac{119}{3}n+16.\end{aligned}$$

当 $(m/6)+(3/2)\le n\le(m/3)+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}&=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{v\in X_i,\\ 0\le i\le k}} d_G(x_{k,0},v)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{v\in X_i,\\ k+1\le i\le 2n-1}} d_G(x_{k,0},v)\\ &=(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-6)+(\frac{2}{3}m^2+\frac{26}{3}m-10)+\sum_{k=2}^{n-1}(k^3-5k^2+(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+8)k+\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-18)\\ &+\sum_{k=0}^{-\frac{m}{3}+2n-2}(mk^2+(-4nm+m)k+\frac{1}{27}m^3+\frac{5}{9}m^2+(4n^2-2n+\frac{8}{3})m-8)\\ &+\sum_{k=-\frac{m}{3}+2n-1}^{n-1}(-k^3+(6n-8)k^2-(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+12n^2-32n+21)k+(\frac{2}{3}n-\frac{1}{3})m^2\\ &+(\frac{26}{3}n-\frac{13}{3})m+8n^3-32n^2+42n-26)\\ &=-\frac{1}{324}m^4+(\frac{2}{27}n-\frac{13}{162})m^3+(\frac{13}{9}n-\frac{3}{4})m^2+(\frac{8}{3}n^3+9n-\frac{53}{18})m-22n+12.\end{aligned}$$

当 $n\geq(m/3)+2$ 时, 有

$$\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{v\in X_i,\\0\leq i\leq k}}d_G(x_{k,0},v)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\substack{v\in X_i,\\k+1\leq i\leq 2n-1}}d_G(x_{k,0},v)$$

$$=(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-6)+(\frac{2}{3}m^2+\frac{26}{3}m-10)+\sum_{k=2}^{\frac{m}{3}}(k^3-5k^2+(\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m+8)k+\frac{1}{3}m^2+\frac{13}{3}m-18)$$

$$+\sum_{k=\frac{m}{3}+1}^{n-1}(mk^2+mk+\frac{1}{27}m^3+\frac{8}{9}m^2+7m-14)$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}(mk^2+(-4nm+m)k+\frac{1}{27}m^3+\frac{5}{9}m^2+(4n^2-2n+\frac{8}{3})m-8)$$

$$=-\frac{1}{324}m^4+(\frac{2}{27}n-\frac{13}{162})m^3+(\frac{13}{9}n-\frac{3}{4})m^2+(\frac{8}{3}n^3+9n-\frac{53}{18})m-22n+12.$$

整理并合并上述表达式, 可得到 $\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}$ 的最终结果如下

当 $1\leq n\leq(m/6)+(1/2)$ 时, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}S_{k,0}=(2/3)m^2n^2+(26/3)mn^2+4n^4-(52/3)n^3+27n^2-(119/3)n+16.$

当 $n\geq(m/6)+(3/2)$ 时, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}S_{k,0}=-(m^4/324)+((2n/27)-(13/162))m^3+((13n/9)-(3/4))m^2+((8/3)n^3+9n-(53/18))m-22n+12.$

而计算 $\sum_{k=0}^{n-1}S'_{k,0}$ 时, 运用的方法与理论和计算 $\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}$ 类似, 故直接给出其计算结果如下

当 $1\leq n\leq(m/6)+(1/2)$ 时, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}S'_{k,0}=(2/3)m^2n^2+(22/3)mn^2+4n^4-(44/3)n^3+23n^2-(49/3)n+4.$

当 $n\geq(m/6)+(3/2)$ 时, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}S'_{k,0}=-(m^4/324)+((2n/27)-(11/162))m^3+((11n/9)-(23/36))m^2+((8/3)n^3+(23/3)n-(49/18))m.$

由式 (7), 我们可以得到这个定理的结果.

定理 2 设 m 是正奇数且 $m\equiv 0 \bmod (3)$, n 是正整数, 则 $G=P_{2n+1}\times P(m,3)$ 的 Wiener 指数为

(i) $W(G)=((4/3)n^2+(4/3)n+(1/3))m^3+(16n^2+16n+4)m^2+(8n^4-16n^3+14n^2-26n+1)m$, $1\leq n\leq(m/6)+(1/2)$;

(ii) $W(G)=-(m^5/162)+((4n/27)-(2/27))m^4+((8n/3)-(1/18))m^3+((16/3)n^3+8n^2+(62/3)n+(10/3))m^2+(-22n+1)m$, $n\geq(m/6)+(3/2)$.

证明 路的阶数为 $2n+1$, 故由 G 的对称性有下面的表达式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S_{k,j}=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S_{2n-k,j}\Rightarrow\sum_{k=0}^{2n}\sum_{j=0}^{m-1}S_{k,j}=2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}S_{k,j}+\sum_{j=0}^{m-1}S_{n,j},$$

$S'_{k,j}$ 也有相同的性质. 故 $W(G)$ 可用下面的形式表示, 即

$$W(G)=m(\sum_{k=0}^{n-1}S_{k,0}+\sum_{k=0}^{n-1}S'_{k,0})+\frac{m}{2}(S_{n,0}+S'_{n,0}).$$

对于 $S_{k,0}$, $S'_{k,0}$ 及 $S_{n,0}$, $S'_{n,0}$ 的计算, 我们使用与定理 1 相似的分析方法, 除了点 $x_{k,0}$ 到 $\cup_{i=k+1}^{2n}X_i$ 的距离和, i 的取值应从 $k+1$ 到 $2n-1$ 变为 $k+1$ 到 $2n$.

通过与定理 1 几乎相同的论证, 我们可以得到这个定理的结果. 故对证明细节不再重复叙述.

定理 3 设 m 是正奇数且 $m\equiv 1 \bmod (3)$, n 是正整数, 则 $G=P_{2n}\times P(m,3)$ 的 Wiener 指数为

(i) $W(G)=((4m^3n^2)/3)+16m^2n^2+(8n^4-32n^3+(128/3)n^2-56n+20)m$, $1\leq n\leq(m/6)+(5/6)$;

(ii) $W(G)=-(m^5/162)+((4n/27)-(4/27))m^4+((8n/3)-(32/27))m^3+((16/3)n^3+(128/9)n-(292/81))m^2+(-(928n/27)+(305/18))m$, $n>(m/6)+(5/6)$.

定理 4 设 m 是正奇数且 $m\equiv 1 \bmod (3)$, n 是正整数, 则 $G=P_{2n+1}\times P(m,3)$ 的 Wiener 指数为

(i) $W(G)=((4/3)n^2+(4/3)n+(1/3))m^3+(16n^2+16n+4)m^2+(8n^4-16n^3+(20/3)n^2-(100/3)n-(1/3))m$, $1\le n\le (m/6)+(5/6)$;

(ii) $W(G)=-(m^5/162)+((4/27)n-(2/27))m^4+((8n/3)+(4/27))m^3+((16/3)n^3+8n^2+(164/9)n+(338/81))m^2-((928n/27)+(13/54))m$, $n>(m/6)+(5/6)$.

定理 5 设 m 是正奇数且 $m\equiv 2 \bmod (3)$, n 是正整数, 则 $G=P_{2n}\times P(m,3)$ 的 Wiener 指数为

(i) $W(G)=(4m^3n^2/3)+16m^2n^2+(8n^4-32n^3+(140/3)n^2-56n+20)m$, $1\le n\le (m/6)+(7/6)$;

(ii) $W(G)=-(m^5/162)+((4n/27)-(4/27))m^4+((8n/3)-(35/27))m^3+((16/3)n^3+(140/9)n-(410/81))m^2+(-(692n/27)+(653/54))m$, $n>(m/6)+(7/6)$.

定理 6 设 m 是正奇数且 $m\equiv 2 \bmod (3)$, n 是正整数, 则 $G=P_{2n+1}\times P(m,3)$ 的 Wiener 指数为

(i) $W(G)=((4/3)n^2+(4/3)n+(1/3))m^3+(16n^2+16n+4)m^2+(8n^4-16n^3+(32/3)n^2-(88/3)n-(1/3))m$, $1\le n\le (m/6)+(7/6)$;

(ii) $W(G)=-(m^5/162)+((4n/27)-(2/27))m^4+((8n/3)+(1/27))m^3+((16/3)n^3+8n^2+(176/9)n+(274/81))m^2-((692n/27)+(13/18))m$, $n>(m/6)+(7/6)$.

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory[M]. London: Springer, 2008.

[2] WEICHSEL P M. The Kronecker product of graphs[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1962, 13(1): 47.

[3] 吴丽芸, 田应智. 路和圈、圈和圈的 Kronecker 积图的超点连通性[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(2): 176-181.
WU L Y, TIAN Y Z. Super connected Kronecker products of paths, cycles and cycles[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(2): 176-181. (in Chinese)

[4] HAMMACK R, IMRICH W, KLAVŽAR S. Handbook of product graphs[M]. Boca Raton: CRC Press, 2011.

[5] WIENER H. Structural determination of paraffin boiling points[J]. Journal of the American Chemical Society, 1947, 69(1): 17-20.

[6] HOJI M, LUO Z Y, VUMAR E. Wiener and vertex PI indices of Kronecker products of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2010, 158(16): 1848-1855.

[7] PATTABIRAMAN K, PAULRAJA P. On some topological indices of the tensor products of graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2012, 160(3): 267-279.

[8] PATTABIRAMAN K, PAULRAJA P. Wiener index of the tensor product of a path and a cycle[J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2011, 31(4): 737-751.

[9] PATTABIRAMAN K. Wiener index of the tensor product of cycles[J]. Journal of Prime Research in Mathematics, 2015, 10(1): 1-18.

[10] COXETER H S M. Self-dual configurations and regular graphs[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1950, 56(5): 413-455.

[11] HOLTON D A, SHEEHAN J. The Petersen graph[M]. England: Cambridge University Press, 1993.

[12] STEVANOVI D. Distance regularity of compositions of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17(3): 337-343.

责任编辑: 赵新科