

具有媒体报道和个人防护意识的多时滞媒介 传染病模型 Hopf 分支分析*

郝新杰, 聂麟飞[†]

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 考虑到媒体报道、个人防护意识和时滞效应对媒介传染病传播与防控的影响, 建立一类具有媒体报道延迟和潜伏期时滞影响的媒介传染病模型. 首先, 给出基本再生数的精确表达式, 并用其刻画平衡态的存在性与稳定性, 以及 Hopf 分支的存在性. 即, 当基本再生数小于 1 时, 媒体报道延迟和病原体在媒介体内的潜伏期时滞不会影响模型无病平衡点的稳定性, 而当基本再生数大于 1 时, 媒体报道的延迟会影响地方病平衡点的稳定性, 模型会产生 Hopf 分支. 进一步, 通过使用分支定理讨论 Hopf 分支的方向并得到周期解稳定性的充分条件. 最后, 通过一些数值算例解释主要的理论结果.

关键词: 媒介传染病; 媒体报道; 基本再生数; Hopf 分支与稳定性

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.08.24.0001

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2024)04-0408-011

引文格式: 郝新杰, 聂麟飞. 具有媒体报道和个人防护意识的多时滞媒介传染病模型 Hopf 分支分析[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2024, 41(4): 408-418.

英文引文格式: HAO Xinjie, NIE Linfei. Media coverage and personal protection awareness with Hopf bifurcation analysis of multi-time delay vector-borne disease model[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2024, 41(4): 408-418.

Media Coverage and Personal Protection Awareness with Hopf Bifurcation Analysis of Multi-Time Delay Vector-Borne Disease Model

HAO Xinjie, NIE Linfei

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

Abstract: Considering the effects of media coverage, personal protection awareness and time delays on the spread of vector-borne diseases, a model of vector-borne diseases with delayed media coverage and incubation period delays is developed. Firstly, the exact expression of the basic reproduction number is given and used to characterize the existence and stability of the equilibria and the existence of the Hopf bifurcation. That is, when the basic reproduction number is less than 1, the stability of disease-free equilibrium will not be affected by the media coverage delay and the latency delay of virus in vectors. When the basic reproduction number is greater than 1, the media coverage delay will affect the stability of the endemic equilibrium, and the model will generate the Hopf bifurcation. Further, by using the bifurcation theorem, the direction of Hopf bifurcation is discussed and some sufficient conditions for the stability of periodic solution are obtained. Finally, some numerical examples are given to explain the main theoretical results.

Key words: vector-borne disease; media coverage; basic reproduction number; Hopf bifurcation and stability

0 引言

媒介传染病在传染病家族中占 17%, 常见的媒介传染病有血吸虫病、登革热、寨卡热、鼠疫、狂犬病、禽流

* 收稿日期: 2023-08-24

基金项目: 国家自然科学基金“多宿主传染病模型动力学分析及应用”(11961066); 新疆维吾尔自治区自然科学基金“环境异质与种群异质的传染病的建模与防控策略分析”(2021D01E12).

作者简介: 郝新杰(1997—), 女, 硕士生, 从事微分方程理论及其应用的研究, E-mail: 1961333106@qq.com.

[†] 通讯作者: 聂麟飞(1978—), 男, 博士, 教授, 从事微分方程理论及其应用的研究, E-mail: lfnie@163.com.

感等. 每年有超 70 万人因感染媒介传染病死亡^[1], 这极大地加重了全球疾病负担, 给社会和经济带来巨大损失. 众所周知, 几乎每一种传染病都存在潜伏期, 即病原体侵入宿主到其出现临床症状或可以感染其他宿主的这段时期, 在数学模型中常用时滞表示. 近年来, 众多学者建立并研究了具有潜伏期时滞的传染病模型^[2-4]. 特别的, Xu 等^[5]提出了一类具有潜伏期时滞的蚊媒传染病模型, 证明了平衡点的稳定性, 并以时滞作为分支参数, 建立了 Hopf 分支存在的充分条件. Wei 等^[6]提出了一类具有直接传播和时滞效应的媒介传染病模型, 研究结果表明时滞会影响地方病平衡点的稳定性.

近年来, 互联网的飞速发展给传染病的预防和控制带来了积极的影响. 一旦有疫情出现, 人们不仅可以从网络上获得该传染病的基本特征, 也可以获知其预防手段, 这极大地遏制疫情的发展. 例如, 文献 [7-9] 建立了具有媒体报道的传染病模型, 讨论了媒体效应对疾病传染和控制的影响. Yadav 等^[10]建立了具有媒体报道时滞的 SIR 传染病模型, 研究了模型平衡态的存在性与稳定性, 讨论了时滞效应对平衡态稳定性的影响以及 Hopf 分支的存在性.

纵观现有研究, 具有潜伏期时滞和媒体报道的文章鲜见. 基于时滞的普遍存在性, 种群个体行为的差异性和媒体报道的时效性, 本文建立了一类具有个人防护意识, 媒体报道延迟和病原体潜伏期时滞的媒介传染病模型, 探讨时滞效应和防护意识对疾病预防和控制的影响, 并给出确定疾病流行或消除的阈值条件.

1 模型的建立

将某地区的总人口分为无意识易感者, 有意识易感者, 感染者, 恢复者, 并分别用 $S_h(t)$, $S_p(t)$, $I_h(t)$, $R_h(t)$ 表示 t 时刻这四个仓室的种群数量, 则人口总数 $N_h(t) = S_h(t) + S_p(t) + I_h(t) + R_h(t)$; $M(t)$ 为各类媒体报道累计密度; 媒介种群分为易感媒介和感染媒介, 并用 $S_v(t)$, $I_v(t)$ 表示, 则媒介种群总数 $N_v(t) = S_v(t) + I_v(t)$. 基于病原体在媒介和宿主之间的传播规律, 提出如下具有媒体报道延迟和潜伏期时滞的媒介传染病模型

$$\begin{cases} \frac{dS_h(t)}{dt} = \lambda_h - a\beta_{vh}e^{-\rho M(t)}S_h(t)I_v(t) - \kappa S_h(t)M(t) + \alpha S_p(t) - \mu_h S_h(t) \\ \frac{dS_p(t)}{dt} = \kappa S_h(t)M(t) - \alpha S_p(t) - \mu_h S_p(t) \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = a\beta_{vh}e^{-\rho M(t)}S_h(t)I_v(t) - \gamma_h I_h(t) - \mu_h I_h(t) \\ \frac{dR_h(t)}{dt} = \gamma_h I_h(t) - \mu_h R_h(t) \\ \frac{dM(t)}{dt} = \eta I_h(t - \tau_m) - \mu_0 M(t) \\ \frac{dS_v(t)}{dt} = \lambda_v - a\beta_{hv}e^{-\mu_v \tau_v} S_v(t - \tau_v)I_h(t - \tau_v) - \mu_v S_v(t) \\ \frac{dI_v(t)}{dt} = a\beta_{hv}e^{-\mu_v \tau_v} S_v(t - \tau_v)I_h(t - \tau_v) - \mu_v I_v(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: λ_h 和 λ_v 分别是人类种群和媒介种群的补充率; μ_h 和 μ_v 分别表示人和媒介的自然死亡率; β_{vh} 为无防护意识易感人群与感染媒介接触后被感染的概率; β_{hv} 为易感媒介与感染人群接触后被感染的概率; a 为媒介的叮咬率; κ 为受媒体报道的影响, 无防护意识易感者转化为有防护意识易感者的速率; α 是有防护意识易感者丧失防护意识转化为无防护意识易感者的速率; γ_h 表示感染者的恢复率; η 表示媒体报道的执行率, 它与感染人数成正比; μ_0 为媒体报道累计密度的耗散速率; $e^{-\rho M(t)}$ 和 $e^{-\mu_v \tau_v}$ 分别表示媒体报道的影响率和媒介的存活率.

基于模型 (1) 的生物背景, 其初始条件为 $S_h(0) > 0$, $S_p(0) > 0$, $I_h(\theta) = \phi_1(\theta) \geq 0$, $M(0) \geq 0$, $S_v(0) > 0$, $I_v(\theta) = \phi_2(\theta) \geq 0$, $\tau = \max\{\tau_v, \tau_m\}$, 这里 $\phi_i(\theta)(i=1,2)$ 是区间 $[-\tau, 0]$ 上的连续函数.

由模型 (1) 可知, $dN_h(t)/dt = \lambda_h - \mu_h N_h(t)$, $dN_v(t)/dt = \lambda_v - \mu_v N_v(t)$. 所以有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_h(t) = \frac{\lambda_h}{\mu_h}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N_v(t) = \frac{\lambda_v}{\mu_v}.$$

从而可知 $\Omega = \{(S_h, S_p, I_h, R_h, M, S_v, I_v) : 0 \leq S_h, S_p, I_h, R_h < \lambda_h/\mu_h, 0 \leq M \leq \eta\lambda_h/d\mu_h, 0 \leq S_v, I_v \leq \lambda_v/\mu_v\}$ 是模型 (1) 的最大正向不变集^[11].

因为 R_h 与模型 (1) 的其它方程解耦, 根据动力系统的极限理论可知, 模型 (1) 的动力学行为等价于模型 (2) 的动力学行为

$$\begin{cases} \frac{dS_h(t)}{dt} = \lambda_h - a\beta_{vh}e^{-\rho M(t)}S_h(t)I_v(t) - \kappa S_h(t)M(t) + \alpha S_p(t) - \mu_h S_h(t) \\ \frac{dS_p(t)}{dt} = \kappa S_h(t)M(t) - \alpha S_p(t) - \mu_h S_p(t) \\ \frac{dI_h(t)}{dt} = a\beta_{vh}e^{-\rho M(t)}S_h(t)I_v(t) - \gamma_h I_h(t) - \mu_h I_h(t) \\ \frac{dM(t)}{dt} = \eta I_h(t - \tau_m) - \mu_0 M(t) \\ \frac{dI_v(t)}{dt} = a\beta_{hv}e^{-\mu_v \tau_v} \left(\frac{\lambda_v}{\mu_v} - I_v(t - \tau_v) \right) I_h(t - \tau_v) - \mu_v I_v(t) \end{cases} \quad (2)$$

2 平衡点的存在性以及无病平衡点的稳定性

类似文献 [12] 中的第二代矩阵方法, 模型 (2) 的基本再生数定义为

$$\mathcal{R}_0 = \frac{a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \lambda_h \lambda_v}{\mu_h \mu_v^2 (\gamma_h + \mu_h)}.$$

显然, 模型 (2) 存在一个无病平衡点 $\mathcal{E}_0 = (\lambda_h/\mu_h, 0, 0, 0, 0)$. 此外, 若模型 (2) 还存在地方病平衡点 $\mathcal{E}^* = (S_h^*, S_p^*, I_h^*, M^*, I_v^*)$, 则有

$$\begin{cases} 0 = \lambda_h - a\beta_{vh}e^{-\rho M^*} S_h^* I_v^* - \kappa S_h^* M^* + \alpha S_p^* - \mu_h S_h^* \\ 0 = \kappa S_h^* M^* - \alpha S_p^* - \mu_h S_p^* \\ 0 = a\beta_{vh}e^{-\rho M^*} S_h^* I_v^* - \gamma_h I_h^* - \mu_h I_h^* \\ 0 = \eta I_h^* - \mu_0 M^* \\ 0 = a\beta_{hv}e^{-\mu_v \tau_v} \left(\frac{\lambda_v}{\mu_v} - I_v^* \right) I_h^* - \mu_v I_v^* \end{cases} \quad (3)$$

直接计算可得

$$\begin{aligned} S_h^* &= \frac{\mu_0 (\lambda_h - (\gamma_h + \mu_h) I_h^*) (\alpha + \mu_h)}{\mu_h \mu_0 (\alpha + \mu_h) + \kappa \mu_h I_h^*}, & S_p^* &= \frac{\eta \kappa S_h^* I_h^*}{\mu_0 (\alpha + \mu_h)} \\ I_v^* &= \frac{a \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} I_h^* \lambda_v I_h^*}{\mu_v (a \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} I_h^* + \mu_v)}, & M^* &= \frac{\eta I_h^*}{\mu_0} \end{aligned} \quad (4)$$

将 (4) 代入 (3) 中的第二个方程, 可得

$$\mu_0 (\lambda_h - (\gamma_h + \mu_h) I_h^*) (\alpha + \mu_h) \mathcal{R}_0 \mu_h \mu_v e^{-\frac{\rho \eta}{\mu_0} I_h^*} = \lambda_h (\mu_h \mu_0 (\alpha + \mu_h) + \mu_h \kappa I_h^*) (\mu_v + a \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} I_h^*) \quad (5)$$

记方程 (5) 等号左边为 $f(I_h^*)$, 等号右边为 $g(I_h^*)$, 则有

$$\begin{aligned} f(0) &= \mu_0 \mathcal{R}_0 \lambda_h (\alpha + \mu_h) \mu_h \mu_v, & g(0) &= \mu_0 \lambda_h (\alpha + \mu_h) \mu_h \mu_v, \\ f'(I_h^*) &= -\mu_0 \mathcal{R}_0 (\gamma_h + \mu_h) (\alpha + \mu_h) \mu_h \mu_v - \rho \eta \mathcal{R}_0 (\lambda_h - (\gamma_h + \mu_h) I_h^*) (\alpha + \mu_h) \mu_h \mu_v e^{-\frac{\rho \eta}{\mu_0} I_h^*}. \end{aligned}$$

由初始条件 $S_h(0) > 0$, $S_p(0) > 0$ 和 $\lambda_h - (\gamma_h + \mu_h) I_h^* = \mu_h (S_h^* + S_p^*)$ 知, $f'(I_h^*) < 0$, 即 $f(I_h^*)$ 是单调递减的. 另一方面, $g(I_h^*)$ 是一元二次函数, 其对称轴在 y 轴的左侧且开口向上. 因此, 若两个曲线有交点, 则需 $f(0) > g(0)$. 即 $\mathcal{R}_0 > 1$. 此时, 方程 (5) 有正根, 即模型 (2) 存在地方病平衡点.

综合上述讨论, 有下面的定理.

定理 1 当 $\mathcal{R}_0 \leq 1$ 时, 模型 (2) 仅有无病平衡点 \mathcal{E}_0 , 而当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 除 \mathcal{E}_0 外, 模型 (2) 还存在地方病平衡点 $\mathcal{E}^* = (S_h^*, S_p^*, I_h^*, M^*, I_v^*)$.

模型 (2) 任一平衡点的局部稳定性可由模型在该点的 Jacobi 矩阵的特征方程所决定. 设 $\tilde{E}(\tilde{S}_h, \tilde{S}_p, \tilde{I}_h, \tilde{M}, \tilde{I}_v)$

为模型的任一平衡点, 则该点处的 Jacobi 矩阵的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda + A + \mu_h + \kappa \tilde{M} & -\alpha & 0 & \kappa \tilde{S}_h - B & C \\ -\kappa \tilde{M} & \lambda + \alpha + \mu_h & 0 - \kappa \tilde{S}_h & 0 & 0 \\ -A & 0 & \lambda + \mu_h + \gamma_h & B & -C \\ 0 & 0 & -\eta e^{-\lambda \tau_m} & \lambda + d & 0 \\ 0 & 0 & -D e^{-\lambda \tau_v} & 0 & \lambda + K e^{-\lambda \tau_v} + \mu_v \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

其中: $A = a\beta_{vh}e^{-\rho \tilde{M}} \tilde{I}_v$, $B = \rho a\beta_{vh}e^{-\rho \tilde{M}} \tilde{S}_h \tilde{I}_v$, $C = a\beta_{vh}e^{-\rho \tilde{M}} \tilde{S}_h$, $K = a\beta_{hv}e^{-\mu_v \tau_v} \tilde{I}_h$, $D = a\beta_{hv}e^{-\mu_v \tau_v} (\lambda_v / \mu_v - \tilde{I}_v)$.

定理 2 若 $\mathcal{R}_0 < 1$, 模型 (2) 的无病平衡点 \mathcal{E}_0 是局部渐近稳定的, 反之则不稳定.

证明 模型在无病平衡点 \mathcal{E}_0 处的特征方程为

$$(\lambda + \mu_0)(\lambda + \alpha + \mu_h)(\lambda + \mu_h) \left[(\lambda + \gamma_h + \mu_h)(\lambda + \mu_v) - a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} e^{\lambda \tau_v} \frac{\lambda_h \lambda_v}{\mu_h \mu_v} \right] = 0.$$

显然, $\lambda_1 = -\mu_h < 0$, $\lambda_2 = -(\alpha + \mu_h) < 0$, $\lambda_3 = -\mu_0 < 0$ 是上式特征方程的根, 方程的其它根可由方程 (7) 给出

$$(\lambda + \gamma_h + \mu_h)(\lambda + \mu_v) - a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} e^{-\lambda \tau_v} \frac{\lambda_h \lambda_v}{\mu_h \mu_v} = 0 \tag{7}$$

令

$$G(\lambda) = \frac{a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \frac{\lambda_h \lambda_v}{\mu_h \mu_v} e^{-\lambda \tau_v}}{(\lambda + \gamma_h + \mu_h)(\lambda + \mu_v)},$$

其中 λ 为实数, 则 $G(\lambda)$ 关于 λ 单调递减且 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G(\lambda) = 0$. 由方程 (7) 可知, \mathcal{E}_0 的稳定性可由 $G(\lambda) = 1$ 的根的实部决定. 容易验证

$$G(0) = \frac{a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \lambda_h \lambda_v}{\mu_h \mu_v^2 (\mu_h + \gamma_h)} = \mathcal{R}_0.$$

当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 函数 $G(\lambda) - 1$ 与横轴有一交点 $(\lambda^*, 0)$ 且 $\lambda^* > 0$. 即, 方程 (7) 有正根 λ^* . 因此, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时无病平衡点 \mathcal{E}_0 是不稳定的.

下面证明当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $G(\lambda) = 1$ 的所有根都有负实部. 用反证法, 假设 $\lambda = c + bi$ ($c \geq 0$) 是 $G(\lambda) = 1$ 的根, 则

$$\begin{aligned} 1 = |G(\lambda)| &= \left| \frac{a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \lambda_h \lambda_v e^{-(c+bi)\tau_v}}{\mu_h \mu_v (c + bi + \gamma_h + \mu_h)(c + bi + \mu_v)} \right| \\ &= \left| \frac{a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \lambda_h \lambda_v e^{-c\tau_v} (\cos b\tau_v - i \sin b\tau_v)}{[(c + bi)(c + bi) + (c + bi)(\mu_v + \gamma_h + \mu_h) + \mu_v(\gamma_h + \mu_h)] \mu_h \mu_v} \right| \\ &\leq \left| \frac{a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} e^{-c\tau_v} \lambda_h \lambda_v}{[(\mu_v + \gamma_h + \mu_h) + \mu_v(\gamma_h + \mu_h)] \mu_h \mu_v} \right| \\ &\leq \left| \frac{a^2 \beta_{vh} \beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \lambda_h \lambda_v}{\mu_h \mu_v \mu_v (\gamma_h + \mu_h)} \right| = \mathcal{R}_0, \end{aligned}$$

这与 $\mathcal{R}_0 < 1$ 矛盾. 故当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $G(\lambda) = 1$ 的所有根均具有负实部, 即, 无病平衡点 \mathcal{E}_0 是局部渐近稳定的.

定理 3 如果 $\mathcal{R}_0 < 1$, 则模型 (2) 的无病平衡点 \mathcal{E}_0 是全局渐近稳定的.

证明 构造 Lyapunov 泛函

$$V(t) = I_v(t) + \frac{a\beta_{vh}e^{-\mu_v \tau_v} \lambda_v}{\mu_v(\gamma_h + \mu_h)} I_h(t) + a\beta_{hv}e^{-\mu_v \tau_v} \left(\frac{\lambda_v}{\mu_v} - I_v(t) \right) \int_{t-\tau_v}^t I_h(t) d\eta.$$

沿着模型(2)的解求导得

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= a\beta_{hv}e^{-\mu_v\tau_v} \left(\frac{\lambda_v}{\mu_v} - I_v(t-\tau_v) \right) I_h(t-\tau_v) + \frac{a\beta_{vh}e^{-\mu_v\tau_v}\lambda_v}{\mu_v(\gamma_h+\mu_h)} \left[a\beta_{vh}e^{-\rho M(t)} S_h(t) I_v(t) \right. \\ &\quad \left. - \gamma_h I_h(t) - \mu_h I_h(t) \right] + a\beta_{hv}e^{-\mu_v\tau_v} \left(\frac{\lambda_v}{\mu_v} - I_v \right) (I_h(t) - I_h(t-\tau_v)) \\ &\leq a\beta_{hv}e^{-\mu_v\tau_v} \left(\frac{\lambda_v}{\mu_v} - I_v \right) I_h(t-\tau_v) + \frac{\mathcal{R}_0\mu_h\mu_v}{\lambda_h} S_h(t) I_v(t) - \frac{a\beta_{hv}e^{-\mu_v\tau_v}\lambda_v}{\mu_v} I_h(t) \\ &\quad - \mu_v I_v(t) + a\beta_{vh}e^{-\mu_v\tau_v} \left(\frac{\lambda_v}{\mu_v} - I_v \right) I_h(t) - a\beta_{vh}e^{-\mu_v\tau_v} \left(\frac{\lambda_v}{\mu_v} - I_v \right) I_h(t-\tau_v) \\ &\leq (\mathcal{R}_0 - 1)u_v I_v(t). \end{aligned}$$

因此, 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, $dV(t)/dt \leq 0$, 当且仅当 $I_v(t) \equiv 0$ 时等号成立. 容易验证, 单点集 $\{\mathcal{E}_0\}$ 是 $\{S_h(t), I_h(t), S_v(t), I_v(t) \in \Omega : dV(t)/dt = 0\}$ 中的最大不变集, 由 LaSalle 不变集原理可得 $\{\mathcal{E}_0\}$ 在 Ω 中是全局渐近稳定的.

3 地方病平衡点的稳定性与 Hopf 分支分析

本节将研究模型(2)在地方病平衡点 $\mathcal{E}^* = (S_h^*, S_p^*, I_h^*, M^*, I_v^*)$ 附近的稳定性. 由方程(6)可知, 模型(2)在 \mathcal{E}^* 处的特征方程为

$$\begin{aligned} \lambda^5 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_4\lambda + A_5 + (B_1\lambda^4 + B_2\lambda^3 + B_3\lambda^2 + B_4\lambda + B_5)e^{-\lambda\tau_v} \\ + (C_1\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_3\lambda + C_4)e^{-\lambda\tau_m} + (D_1\lambda^2 + D_2\lambda + D_3)e^{-\lambda(\tau_m+\tau_v)} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h + \mu_v + \mu_0 + \mu_h + \gamma_h, \\ A_2 &= (A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha + (\mu_v + \mu_0 + \mu_h + \gamma_h)(A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h) \\ &\quad + \mu_v(\mu_0 + \mu_h + \gamma_h) + \mu_0(\mu_h + \gamma_h), \\ A_3 &= (\mu_v + \mu_0 + \mu_h + \gamma_h)((A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha) + (\mu_0(\mu_h + \gamma_h) \\ &\quad + \mu_v(\mu_0 + \mu_h + \gamma_h))(A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h) + \mu_v\mu_0(\mu_h + \gamma_h), \\ A_4 &= (\mu_v(\mu_0 + \mu_h + \gamma_h) + \mu_0(\mu_h + \gamma_h))((A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha) \\ &\quad + \mu_v\mu_0(\mu_h + \gamma_h)(A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h), \\ A_5 &= \mu_v\mu_0(\mu_h + \gamma_h)((A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha), \\ B_1 &= P, \quad B_2 = P(A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h + \mu_0 + \mu_h + \gamma_h), \\ B_3 &= P((A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha + (\mu_0 + \mu_h + \gamma_h) \times (A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h) + \mu_0(\mu_h + \gamma_h)), \\ B_4 &= P((\mu_0 + \mu_h + \gamma_h)((A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha) + \mu_0(\mu_h + \gamma_h)(A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h)), \\ B_5 &= P(\mu_0(\mu_h + \gamma_h)((A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha)), \\ C_1 &= B\eta, \quad C_2 = B\eta(A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h + \mu_v) + A\eta(\kappa S_h^* - B), \\ C_3 &= B\eta(A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha + \mu_v(A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h) \\ &\quad + A\eta\kappa S_h^*(\mu_h + \mu_v) - A\eta B(\alpha + \mu_h + \mu_v), \\ C_4 &= \mu_v B\eta(A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha + \mu_v A\eta(\kappa S_h^* - B)(\alpha + \mu_h), \\ D_1 &= BP\eta, \quad D_2 = BP\eta(A + \mu_h + \kappa M^* + \alpha + \mu_h) + AP\eta(\kappa S_h^* - B), \\ D_3 &= BP\eta(A + \mu_h + \kappa M^*)(\alpha + \mu_h) - \kappa M^* \alpha + \mu_h AP\eta\kappa S_h^* - ABP\eta(\alpha + \mu_h). \end{aligned}$$

当 $\tau_m = 0, \tau_v > 0$ 时, 有如下定理.

定理 4 若 $J_1 J_2 J_3 J_4 + 2J_1 J_4 J_5 - J_1^2 J_4^2 - J_3^2 J_4 - J_1 J_5 J_2^2 + J_2 J_3 J_5 - J_5^2 > 0, J_1 J_2 J_3 + J_1 J_5 - J_3^2 - J_1^2 J_4 > 0, J_1 J_2 - J_3 > 0$ 满足且 $N_i > 0 (i = 1, \dots, 5)$, 则当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 对任意的 $\tau_v > 0$, 地方病平衡点 \mathcal{E}^* 是局部渐近稳定的, 其中 N_i 和 J_i 由方程(9)和(10)给出.

证明 若 $\tau_m = 0, \tau_v = 0$, 特征方程 (8) 具有以下形式

$$\lambda^5 + J_1\lambda^4 + J_2\lambda^3 + J_3\lambda^2 + J_4\lambda + J_5 = 0 \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned} J_1 &= A_1 + B_1, \quad J_2 = A_2 + B_2 + C_1, \quad J_3 = A_3 + B_3 + C_2 + D_1, \\ J_4 &= A_4 + B_4 + C_3 + D_2, \quad J_5 = A_5 + B_5 + C_4 + D_3. \end{aligned}$$

根据 Hurwitz 准则, 方程 (9) 的根均具有负实部, 地方病平衡点 \mathcal{E}^* 是局部渐近稳定的. 若 $\tau_v > 0$, 特征方程的根的正负依赖 τ_v 的变化. 此时, 特征方程为

$$\begin{aligned} &\lambda^5 + A_1\lambda^4 + (A_2 + C_1)\lambda^3 + (A_3 + C_2)\lambda^2 + (A_4 + C_3)\lambda + (A_5 + C_4) \\ &+ (B_1\lambda^4 + B_2\lambda^3 + (B_3 + D_1)\lambda^2 + (B_4 + D_2)\lambda + B_5 + D_3)e^{-\lambda\tau_v} = 0. \end{aligned}$$

用反证法, 假设存在纯虚根 $\lambda = i\omega_1 (\omega_1 > 0)$, 带入上式分离虚实部, 然后平方相加可得

$$\omega_1^{10} + N_1\omega_1^8 + N_2\omega_1^6 + N_3\omega_1^4 + N_4\omega_1^2 + N_5 = 0 \quad (10)$$

其中: $N_1 = A_1^2 - B_1^2 - 2(A_2 + C_1)$, $N_2 = (A_2 + C_1)^2 + 2(A_4 + C_3) + 2B_1(B_3 + D_1) - B_2^2 - 2A_1(A_5 + C_4)$, $N_3 = (A_3 + C_2)^2 + 2A_1(A_5 + C_4) - 2(A_2 + C_1)(A_4 + C_3) - (B_3 + D_1)^2 - 2B_1(B_5 + D_3) + 2B_2(B_4 + D_2)$, $N_4 = (A_4 + C_3)^2 - 2(A_3 + C_2)(A_5 + C_4) + 2(B_3 + D_1)(B_5 + D_3) - (B_4 + D_2)^2$, $N_5 = (A_5 + C_4)^2 - (B_5 + D_3)^2$. 不难得出, 当 $N_i > 0 (i = 1, \dots, 5)$ 时, 方程 (10) 在复平面上不存在根, 与假设方程 (10) 有根矛盾. 因此, 当 $\tau_v > 0$ 时, 特征方程的根均具有负实部. 即, 地方病平衡点 \mathcal{E}^* 是局部渐近稳定的.

下面讨论 $\tau_v = 0, \tau_m > 0$ 时, 地方病平衡点 \mathcal{E}^* 的稳定性以及 Hopf 分支的存在性.

定理 5 若定理 4 的 Hurwitz 条件满足且 $K_5^2 < F_4^2$, 则存在 $\tau_m = \tau_m^*$ 使得当 $0 < \tau_m < \tau_m^*$ 时, 地方病平衡点 \mathcal{E}^* 是局部渐近稳定的; 当 $\tau_m > \tau_m^*$ 时, 地方病平衡点 \mathcal{E}^* 是不稳定的. 此外, 当 $\tau_m = \tau_m^*$ 时, 模型 (2) 将经历一个 Hopf 分支, 其中 $\tau_m^* = \arccos(L_1/L_2)/\omega_{m_0}$, L_1 和 L_2 由式 (14) 给出.

证明 若 $\tau_m > 0, \tau_v = 0$, 由特征方程 (8) 可知, 模型 (2) 在 \mathcal{E}^* 处的特征方程为

$$\lambda^5 + K_1\lambda^4 + K_2\lambda^3 + K_3\lambda^2 + K_4\lambda + K_5 + (F_1\lambda^3 + F_2\lambda^2 + F_3\lambda + F_4)e^{-\lambda\tau_m} = 0 \quad (11)$$

其中: $K_1 = A_1 + B_1, K_2 = A_2 + B_2, K_3 = A_3 + B_3, K_4 = A_4 + B_4, K_5 = A_5 + B_5, F_1 = C_1, F_2 = C_2 + D_1, F_3 = C_3 + D_2, F_4 = C_4 + D_3$.

设 $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ 是方程 (11) 的纯虚根, 带入并分离虚实部得

$$\begin{aligned} K_1\omega^4 - K_3\omega^2 + K_5 &= (F_1\omega^3 - F_3\omega)\sin\omega\tau_m + (F_2\omega^2 - F_4)\cos\omega\tau_m \\ \omega^5 - K_2\omega^3 + K_4\omega &= (F_1\omega^3 - F_3\omega)\cos\omega\tau_m - (F_2\omega^2 - F_4)\sin\omega\tau_m \end{aligned} \quad (12)$$

将式 (12) 的两式平方并相加可得

$$\omega^{10} + T_1\omega^8 + T_2\omega^6 + T_3\omega^4 + T_4\omega^2 + T_5 = 0 \quad (13)$$

其中:

$$\begin{aligned} T_1 &= K_1^2 - 2K_2, \quad T_3 = K_3^2 + 2K_1K_5 - 2K_2K_4 + 2F_1F_3 - F_2^2, \quad T_5 = K_5^2 - F_4^2, \\ T_2 &= K_2^2 - 2K_1K_3 + 2K_4 - F_1^2, \quad T_4 = K_4^2 - 2K_3K_5 - F_3^2 + 2F_2F_4. \end{aligned}$$

令 $\omega^2 = \chi$, 方程 (13) 可以转化为下列形式

$$H(\chi) = \chi^5 + T_1\chi^4 + T_2\chi^3 + T_3\chi^2 + T_4\chi + T_5,$$

若 $T_i > 0 (i = 1, \dots, 5)$, 容易计算 $dH(\chi)/d\chi = 5\chi^4 + 4T_1\chi^3 + 3T_2\chi^2 + 2T_3\chi + T_4 > 0$, 若有 $K_5^2 < F_4^2$, 则方程 (13) 至少有一个正根, 用 ω_{m_0} 表示. 此时, 特征方程 (11) 有一对纯虚根 $\pm i\omega_{m_0}$. 进一步, 由方程 (13) 可知 $\tau_{m_j}^*$ 是关于 ω_{m_0} 的函数, $j = 0, 1, \dots$, 且由

$$\tau_{m_j}^* = \frac{1}{\omega_{m_0}} \arccos(L_1/L_2) + \frac{j\pi}{\omega_{m_0}}$$

确定, 其中:

$$\begin{aligned} L_1 &= (K_1\omega^4 - K_3\omega^2 + K_5)(F_2\omega^2 - F_4) + (\omega^5 - K_2\omega^3 + K_4\omega)(F_1\omega^3 - F_3\omega) \\ L_2 &= (F_1\omega^3 - F_3\omega)^2 + (F_2\omega^2 - F_4)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

根据 Butler 引理^[13], 当 $0 \leq \tau_m < \tau_m^*$ 时, 模型 (2) 的地方病平衡点 \mathcal{E}^* 保持稳定, $\tau_m^* = \min_{j \geq 0} \{\tau_{m_j}^*\}$. 如果 $K_5^2 < F_4^2$ 成立, 方程 (13) 有正根. 特征方程 (11) 有纯虚根, \mathcal{E}^* 不稳定. 现在, 验证横截性条件 $\text{sign}\{d\text{Re}\{\lambda\tau_m\}/d\tau_m\}_{\tau_m=\tau_m^*} > 0$.

对方程 (11) 关于 τ_m 求导并由式 (12) 可得

$$\begin{aligned} & \text{sign}\left\{\frac{d\text{Re}(\lambda)}{d\tau_m}\right\}_{\lambda=i\omega_{m_0}} \\ &= \text{sign}\left\{\text{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau_m}\right)\right\}_{\lambda=i\omega_{m_0}} \\ &= \text{sign}\left\{\text{Re}\left[\frac{5\lambda^4 + 4E_1\lambda^3 + 3E_2\lambda^2 + 2E_3\lambda + E_4}{-\lambda(\lambda^5 + E_1\lambda^4 + E_2\lambda^3 + E_3\lambda^2 + E_4\lambda + E_5)}\right]_{\lambda=i\omega_{m_0}}\right\} \\ & \quad + \text{sign}\left\{\text{Re}\left[\frac{3F_1\lambda^2 + 2F_2\lambda + F_3}{\lambda(F_1\lambda^3 + F_2\lambda^2 + F_3\lambda + F_4)}\right]_{\lambda=i\omega_{m_0}}\right\} \\ &= \text{sign}\left\{\frac{5\omega_{m_0}^8 + 4T_1\omega_{m_0}^6 + 3T_2\omega_{m_0}^4 + 2T_3\omega_{m_0}^2 + T_4}{(F_1\omega_{m_0}^3 - F_3\omega_{m_0})^2 + (F_2\omega_{m_0}^2 - F_4)^2}\right\}. \end{aligned}$$

从而有

$$\left[\frac{d\text{Re}(\lambda)}{d\tau_m}\right]_{\omega=\omega_{m_0}, \tau_m=\tau_m^*} = \frac{\frac{dH(\lambda)}{d\lambda}}{(F_1\omega_{m_0}^3 - F_3\omega_{m_0})^2 + (F_2\omega_{m_0}^2 - F_4)^2} > 0.$$

因此, 当 τ_m 通过临界值 τ_m^* 时, 横截性条件成立, 模型 (2) 会产生 Hopf 分支.

4 Hopf 分支的方向及周期解的稳定性

本节将讨论在临界值 τ_m^* 处产生 Hopf 分支的方向及周期解的稳定性. 令 $\tau = \mu + \tau_m^*$, 并作变量代换 $x_1(t) = S_h(t) - S_h^*$, $x_2(t) = S_p(t) - S_p^*$, $x_3(t) = I_h(t) - I_h^*$, $x_4(t) = M(t) - M^*$, $x_5(t) = I_v(t) - I_v^*$, 则模型 (2) 又可以写为

$$\frac{dx(t)}{dt} = L_\mu x_t - f(\mu, x_t) \quad (15)$$

其中: $x(t) = (x_1(t), \dots, x_5(t))^T \in \mathbb{R}^5$, $L_\mu \in \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^5$, $f: \mathbb{R} \times \mathcal{C}, \mathbb{R}$ 表示连续空间.

当 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5)^T \in \mathcal{C}$ 时, 定义

$$\begin{aligned} L_\mu \phi &:= (\tau_m^* + \mu) [M_1\phi(0) + M_2\phi(-\sigma) + M_3\phi(-1)], \\ f(\mu, x_t) &:= (\tau_m^* + \mu) \begin{pmatrix} -a\beta_{vh}e^{-\rho M^*}\phi_1(0)\phi_5(0) - \kappa\phi_1(0)\phi_4(0) \\ \kappa\phi_1(0)\phi_4(0) \\ a\beta_{vh}e^{-\rho M^*}\phi_1(0)\phi_5(0) \\ 0 \\ a\beta_{hv}\phi_3(-\sigma)\phi_5(-\sigma) \end{pmatrix}, \\ M_1 &= \begin{pmatrix} -A - \mu_h - \kappa M^* & \alpha & 0 & B - \kappa S_h^* & -C \\ \kappa M^* & -(\alpha + \mu_h) & 0 & 0 & 0 \\ A & \alpha_h & -\mu_h - \gamma_h & -B & C \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 0 & -P \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中: $\sigma = \tau_v^*/\tau_m^*$, A, B, C, D 和 P 在方程 (6) 中已给出. 由 Riesz 表示定理可知, 存在一个 5×5 的有界变差矩阵函数 $\eta(\theta, \mu)$, $\theta \in [-1, 0)$, 使得对于 $\phi \in \mathcal{C}$, 有 $L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta)$. 实际上, 可以令

$$\eta(\theta, \mu) = \begin{cases} (\tau_m^* + \mu)(M_1 + M_2 + M_3), & \theta = 0, \\ (\tau_m^* + \mu)(M_2 + M_3), & \theta \in [-\frac{\tau_v}{\tau_m^*}, 0), \\ (\tau_m^* + \mu)M_3, & \theta \in [-1, -\frac{\tau_v}{\tau_m^*}), \\ 0, & \theta = -1. \end{cases}$$

对于 $\phi \in \mathcal{C}^5$, 定义

$$\mathcal{A}(\mu)\phi = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0), \\ \int_{-1}^0 d\eta(\xi, \mu)\phi(\xi), & \theta = 0, \end{cases} \quad \mathcal{R}(\mu)\phi = \begin{cases} 0, & \theta \in (-1, 0), \\ f(\mu, \phi), & \theta = 0. \end{cases}$$

则系统 (15) 可以转化为 $dx(t)/dt = \mathcal{A}(\mu)x_t + \mathcal{R}(\mu)x_t$, 其中: $x_t = x(t+\theta)$, $\theta \in [-1, 0]$.

对于 $\psi, \phi \in \mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R}^5)$, 定义 $\mathcal{A}(0)$ 的伴随算子 \mathcal{A}^*

$$\mathcal{A}_\mu^* \psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1], \\ \int_{-1}^0 d\eta(s, \mu)\phi(s), & s = 0, \end{cases}$$

和一个双线性内积

$$\langle \psi, \phi \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{x=0}^\theta \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi \tag{16}$$

其中: $\eta(\theta) = \eta(\theta, 0)$, $\mathcal{A}(0)$ 和 \mathcal{A}^* 是一对共轭算子. $\pm i\omega$ 是 $\mathcal{A}(0)$ 的特征根, 它也是 \mathcal{A}^* 的特征根.

接下来计算 $\mathcal{A}(0)$ 关于特征值 $+i\omega$ 的特征向量以及 \mathcal{A}^* 关于特征值 $-i\omega$ 的特征向量. 假设 $q(\theta) = (1, q_2, q_3, q_4, q_5)^T e^{i\omega\tau_m^*\theta}$ 是 $\mathcal{A}(0)$ 关于特征值 $+i\omega$ 的特征向量, 其中:

$$q_2 = \frac{\kappa M^* + \kappa S_h^* q_4}{i\omega + \alpha + \mu_h}, \quad q_3 = \frac{A}{(i\omega + \gamma_h + \mu_h) + \frac{B\eta e^{-i\omega\tau_m^*}}{(i\omega + \mu_0)} - \frac{CD^* e^{-i\omega\tau_v}}{(i\omega + \mu_v + P e^{-i\omega\tau_v})}},$$

$$q_4 = \frac{\eta e^{-i\omega\tau_m^*} q_3}{i\omega + \mu_0}, \quad q_5 = \frac{D e^{-i\omega\tau_v} q_3}{i\omega + \mu_v + P e^{-i\omega\tau_v}}.$$

类似的, 可得 $q^*(s) = (1, q_2^*, q_3^*, q_4^*, q_5^*)^T e^{-i\omega\tau_m^*s}$ 是 \mathcal{A}^* 关于特征值 $-i\omega$ 的特征向量, 其中:

$$q_2^* = \frac{\alpha}{-i\omega + \alpha + \mu_h}, \quad q_3^* = \frac{-i\omega + A + \kappa M^* + \mu_h - \kappa M^* q_2^*}{A},$$

$$q_4^* = \frac{B\kappa S_h^* + \kappa S_h^* q_2^* + Bq_3^*}{-i\omega + \mu_0}, \quad q_5^* = \frac{Cq_3^* - C}{-i\omega + \mu_v + P e^{-i\omega\tau_v}}.$$

由式 (16) 和 $\langle q(\theta), q^*(s) \rangle = 1$, 可得

$$\bar{G} = (1 + \bar{q}_2 q_2^* + \bar{q}_3 q_3^* + \bar{q}_4 q_4^* + \bar{q}_5 q_5^* + \tau_m^* e^{-i\omega\tau_m^*} \eta q_4^* \bar{q}_3 + \tau_v^* e^{-i\omega\tau_v} q_5^* (D\bar{q}_3 - P\bar{q}_5))^{-1}.$$

根据 Hassard 等^[14]给出的算法可以得到用于确定 Hopf 分支方向和分支周期解稳定性的一系列系数

$$\begin{aligned} g_{20} &= 2\tau_m^* \bar{G} \{ a\beta_{vh} e^{-\rho M^*} (\bar{q}_3^* - 1) q_5 + \kappa (\bar{q}_2^* - 1) q_4 - a\beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \bar{q}_5^* q_3 q_5 e^{-2i\omega \tau_v} \}, \\ g_{11} &= \tau_m^* \bar{G} \{ a\beta_{vh} e^{-\rho M^*} (\bar{q}_3^* - 1) (\bar{q}_5 + q_5) + \kappa (\bar{q}_2^* - 1) (q_4 + \bar{q}_4) - a\beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \bar{q}_5^* (q_3 \bar{q}_5 + \bar{q}_3 q_5) \}, \\ g_{02} &= 2\tau_m^* \bar{G} \{ a\beta_{vh} e^{-\rho M^*} (\bar{q}_3^* - 1) \bar{q}_5 + \kappa (\bar{q}_2^* - 1) \bar{q}_4 - a\beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \bar{q}_5^* \bar{q}_3 \bar{q}_5 e^{-2i\omega \tau_v} \}, \\ g_{21} &= \tau_m^* \bar{G} \left\{ e^{-\rho M^*} \beta_{vh} (\bar{q}_3^* - 1) (2W_{11}^{(5)}(0) + W_{20}^{(5)}(0) + \bar{q}_5 W_{11}^{(1)}(0) + 2W_{11}^{(1)}(0) q_5) \right. \\ &\quad \left. + \kappa (\bar{q}_2^* - 1) (2W_{11}^{(4)}(0) + W_{20}^{(5)}(0) + \bar{q}_4 W_{11}^{(1)}(0) + 2W_{11}^{(1)}(0) q_4) - a\beta_{hv} e^{-\mu_v \tau_v} \bar{q}_5^* \right. \\ &\quad \left. \times (2W_{11}^{(5)}(-\sigma) q_3 e^{-i\omega \tau_v} + W_{20}^{(5)}(-\sigma) \bar{q}_3 e^{i\omega \tau_v} + \bar{q}_5 e^{i\omega \tau_v} W_{11}^{(3)}(-\sigma) + 2W_{11}^{(3)}(-\sigma) q_5 e^{-i\omega \tau_v}) \right\}, \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} W_{20}(\theta) &= \frac{ig_{20}q(0)e^{i\omega\tau_m^*\theta}}{\omega\tau_m^*} + \frac{i\bar{g}_{02}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_m^*\theta}}{3\omega\tau_m^*} + \mathbf{E}_1 e^{2i\omega\tau_m^*\theta}, \\ W_{11}(\theta) &= -\frac{ig_{11}q(0)e^{i\omega\tau_m^*\theta}}{\omega\tau_m^*} + \frac{i\bar{g}_{11}\bar{q}(0)e^{-i\omega\tau_m^*\theta}}{\omega\tau_m^*} + \mathbf{E}_2, \end{aligned}$$

其中: $\mathbf{E}_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)}, E_1^{(3)}, E_1^{(4)}, E_1^{(5)})^T$, $\mathbf{E}_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)}, E_2^{(3)}, E_2^{(4)}, E_2^{(5)})^T$ 是常向量. 可以由下列等式求出 \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 的值.

$$\begin{pmatrix} \Sigma_1 & -\alpha & 0 & \kappa S_h^* - B & C \\ -\kappa M^* & 2i\omega + \alpha + \mu_h & 0 & -\kappa S_h^* & 0 \\ -A & 0 & 2i\omega + \mu_h + \gamma_h & B & -C \\ 0 & 0 & -\eta e^{-2i\omega\tau_m^*} & 2i\omega + \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & -D e^{-2i\omega\tau_v} & 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} \Sigma_3 \\ \kappa q_4 \\ \Sigma_4 \\ 0 \\ \Sigma_5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A + \mu_h + \kappa \tilde{M} & -\alpha & 0 & \kappa S_h^* - B & C \\ -\kappa M^* & \alpha + \mu_h & 0 & -\kappa S_h^* & 0 \\ -A & 0 & \mu_h + \gamma_h & B & -C \\ 0 & 0 & -\eta & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & -D & 0 & P + \mu_v \end{pmatrix} \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} \Sigma_6 \\ \kappa(q_4 + \bar{q}_4) \\ \Sigma_7 \\ 0 \\ \Sigma_8 \end{pmatrix},$$

其中: $\Sigma_1 = 2i\omega + A + \mu_h + \kappa M^*$, $\Sigma_2 = 2i\omega + P e^{-2i\omega\tau_v} + \mu_v$, $\Sigma_3 = -a\beta_{vh} e^{-\rho M^*} q_5 - \kappa q_4$, $\Sigma_4 = a\beta_{ch} e^{-\rho M^*} q_5$, $\Sigma_5 = a\beta_{hv} e^{-2i\omega\tau_v} q_3 q_5$, $\Sigma_6 = -a\beta_{vh} e^{-\rho M^*} (q_5 + \bar{q}_5) - \kappa(q_4 + \bar{q}_4)$, $\Sigma_7 = a\beta_{ch} e^{-\rho M^*} (q_5 + \bar{q}_5)$, $\Sigma_8 = a\beta_{hv} e^{-2i\omega\tau_v} (\bar{q}_3 q_5 + q_3 \bar{q}_5)$. 因此, 可以得出以下的值

$$\begin{aligned} C_1(0) &= \frac{i}{2\omega_2 \tau_m^*} \left(g_{11} g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2}, \quad \mu_2 = -\frac{\text{Re}\{C_1(0)\}}{\text{Re}\lambda'(\tau_m^*)}, \\ \beta_2 &= 2\text{Re}\{C_1(0)\}, \quad T_2 = \frac{\text{Im}\{C_1(0)\} + \mu \text{Im}\lambda'(0)}{\omega_2 \tau_m^*}. \end{aligned}$$

综合以上分析, 可以得到定理 6.

定理 6 当 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$) 时, 周期解为超临界(亚临界)分支; 当 $\beta_2 < 0$ ($\beta_2 > 0$) 时, 周期解是稳定(不稳定)的; 当 $T_2 > 0$ ($T_2 < 0$) 时, 周期解的周期增大(减小).

5 数值模拟

本节将以登革热病毒在蚊子和人群中的传播为例, 解释主要的理论结果, 并讨论时滞对疾病传播的影响. 基于文献 [2] 中参数的取值, 固定人口总规模和媒介总规模分别为 $N_h = 150\,000$, $N_v = 450\,000$, 并且固定基本参数值 $\lambda_h = 5.788\,2$, $\lambda_v = 22\,500$, $\mu_h = 1/(71 \times 365)$, $\mu_v = 0.05$.

首先选取 $a = 0.3$, $\rho = 0.1$, $\alpha = 0.2$, $\mu_0 = 0.5$, $\gamma_h = 0.30$, $\eta = 0.002$, $\kappa = 0.002$, $\beta_{vh} = 0.205/N_h$, $\beta_{hv} = 0.205/N_h$, $\tau_v = 10$, $\tau_m = 10$. 此时, $\mathcal{R}_0 = 0.677\,3 < 1$, 由定理 3 可知, 无病平衡点 \mathcal{E}_0 是全局渐近稳定的. 即, 无论染病者的初

始规模有多大, 疾病最终都是灭绝的. 这也正如图 1 所示, 随着时间不断增加, 从不同初始值出发的轨线, 均会趋于无病平衡点 \mathcal{E}_0 .

进一步, 选取参数 $a = 0.8, \gamma_h = 0.07, \rho = 0.7, \eta = 0.005, \mu_0 = 0.05, \tau_v > 0, \tau_m > 0, \beta_{vh} = \beta_{hv} = 0.375/N_h$, 其它参数如图 1 所示. 通过直接计算, 易得 $\mathcal{R}_0 = 6.8385 > 1$. 图 2 表明, 从任意点出发的解轨线最终都会趋近于稳定的 \mathcal{E}^* , 这或许意味着定理 4 的条件可能需要简化. 因此, 当 τ_v, τ_m 较小时, 如何建立 \mathcal{E}^* 渐近稳定简洁且易于验证的判别准则是值得进一步研究的问题.

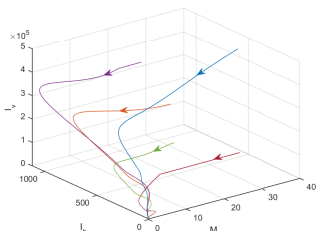


图 1 无病平衡点 \mathcal{E}_0 的稳定性

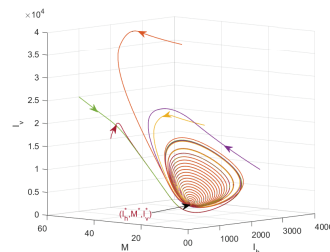


图 2 地方病平衡点 \mathcal{E}^* 的稳定性

为了研究病毒在蚊子体内的潜伏期对疾病传播的影响, 固定 $\tau_m = 1$, 改变 τ_v 的值, 其它参数如图 2 所示. 从图 3 中不难发现随着时滞 τ_v 的增加, 疾病趋于稳定的时间逐渐增长. 此外, 随着潜伏期时滞 τ_v 的增加, 感染者数量的峰值在减少, 且最终感染者的数量也在减少. 因此, 忽略病原体在媒介或宿主体内的潜伏期会高估疾病暴发的风险, 造成医疗资源浪费.

此外, 若选取参数 $\alpha = 0.02, \kappa = 0.005, \eta = 0.005, \tau_v = 0, \tau_m = 20$. 其它参数与图 2 保持一致, 则有 $\mathcal{R}_0 = 8.7807 > 1$. 图 4 表明, \mathcal{E}^* 是不稳定的, 且随着 τ_m 的增加, 模型的轨迹呈现周期振荡现象. 即, 模型 (2) 存在稳定的周期解. 与对应的常微分方程模型相比, 时滞模型的动力学行为更加复杂, 当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 染病者的数量不再稳定于某个确定值, 而是与时滞的大小密切相关.

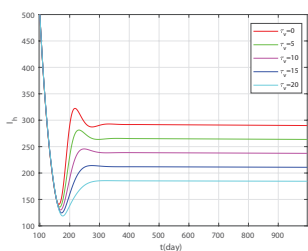


图 3 潜伏期时滞对传染病的影响

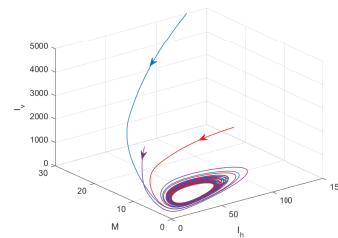


图 4 模型 (2) 存在稳定的周期解

最后, 讨论模型 (2) 的主要参数对基本再生数的敏感性. 由图 5 可知, λ_v 和 τ_v 与 \mathcal{R}_0 呈正相关, 而 μ_v 和 γ_h 与 \mathcal{R}_0 呈负相关. 更具体地说, 采取物理和化学的方法延长病原体在媒介体内的潜伏期控制媒介种群的数量, 以及疾病的治愈率, 可以使得 $\mathcal{R}_0 < 1$, 从而达到控制疾病的目的.

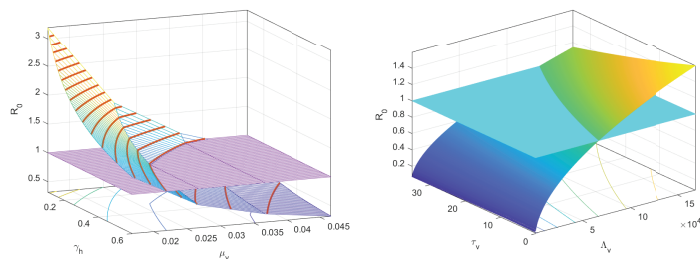


图 5 参数关于 \mathcal{R}_0 的敏感性分析

6 结论与展望

针对当前传染病传播过程中个人防护意识不断增强和新闻媒体积极作用的新特点, 本文建立了一类具有媒体报道延迟 (τ_m) 和病原体潜伏期时滞 (τ_v) 的媒介传染病模型, 讨论媒体的响应速度和病原体在媒介体内的潜伏

期对疾病传播的影响. 利用第二代矩阵方法, 给出了刻画疾病流行或灭绝的阈值条件: 基本再生数 \mathcal{R}_0 的精确表达. 即, 当 $\mathcal{R}_0 < 1$ 时, 无病平衡态是全局渐近稳定的, 而当 $\mathcal{R}_0 > 1$ 时, 无病平衡态不稳定, 模型存在唯一的地方病平衡点. 进一步, 我们也讨论了地方病平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性. 研究表明: 由于受到媒介存活率的影响, 病原体在媒介体内的潜伏期 (τ_v) 对疾病的传播具有一定的抑制作用, 随着潜伏期的增加, 基本再生数单调减少, 忽略病原体在宿主体内的潜伏期会高估疾病暴发的风险; 而媒体报道的响应速度对预测疾病传播有着重要的影响, 快速的媒体响应有助于疫情的控制, 而随着媒体报道的延迟, 传染病传播更加复杂, 地方病平衡点会丧失其稳定性而出现周期振荡现象. 即, Hopf 分支现象.

当然, 为了进行必要的理论分析, 也有很多因素在建模过程中被忽略, 例如, 气候变化和不确定因素对媒介种群的分布和活动范围的影响、病原体在宿主体内的潜伏期、病原体菌株的多样性、疫苗或医疗资源有限性的影响等等. 建立具有一种或多种因素耦合的媒介传染病模型并分析其动力学行为, 值得进一步深入探究.

参考文献:

- [1] 吴海霞, 刘小波, 刘起勇. 我国病媒生物防控现状及面临的问题[J]. 首都公共卫生, 2018, 12(1): 4-6.
WU H X, LIU X B, LIU Q Y. Current situation and problems of disease vector prevention and control in China[J]. Capital Journal of Public Health, 2018, 12(1): 4-6. (in Chinese)
- [2] 周瑜, 郑庭庭. 具有潜伏期时滞的登革热病毒传播模型研究[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2020, 41(4): 7-12.
ZHOU Y, ZHENG T T. A dengue virus transmission model with incubation delay[J]. Journal of Capital Normal University(Natural Science Edition), 2020, 41(4): 7-12. (in Chinese)
- [3] CAI L M, LI X Z, FANG B, et al. Global properties of vector-host disease models with time delays[J]. Journal of Mathematical Biology, 2017, 74(6): 1397-1423.
- [4] 陈伟, 张龙. 具有饱和发生率的两毒株时滞 HIV 感染模型的阈值动力学[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2022, 39(4): 401-411+420.
CHEN W, ZHANG L. Threshold dynamics in two-strain delayed HIV infection model with saturated incidence[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2022, 39(4): 401-411+420. (in Chinese)
- [5] XU J H, ZHOU Y C. Hopf bifurcation and its stability for a vector-borne disease model with delay and reinfection[J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(3): 1685-1702.
- [6] WEI H M, LI X Z, MARTCHEVA M. An epidemic model of a vector-borne disease with direct transmission and time delay[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 342(2): 895-908.
- [7] ZHAO H T, ZHAO M C. Global Hopf bifurcation analysis of an susceptible-infective-removed epidemic model incorporating media coverage with time delay[J]. Journal of Biological Dynamics, 2017, 11(1): 8-24.
- [8] 桑瑞, 张龙, 吴浩. 媒体诱导迁移率变化的双斑块 SIRS 传染病模型研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版)(中英文), 2023, 40(1): 49-56+60.
SANG R, ZHANG L, WU H. Media-induced migration changes in a two-patch SIRS epidemic model[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2023, 40(1): 49-56+60. (in Chinese)
- [9] AL BASIR F, RAY S, VENTURINO E. Role of media coverage and delay in controlling infectious diseases: A mathematical model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 337: 372-385.
- [10] YADAV A, SRIVASTAVA P K. The impact of information and saturated treatment with time delay in an infectious disease model[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2021, 66(1): 277-305.
- [11] SMITH H L. Monotone dynamical systems: An introduction to the theory of competitive and cooperative systems[M]. Providence, R I: American Mathematical Society, 1995.
- [12] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180: 29-48.
- [13] FREEDMAN H, RAO V. The trade-off between mutual interference and time lags in predator-prey systems[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1983, 45(6): 991-1004.
- [14] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and applications of Hopf bifurcation[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.