具有自然年龄和染病年龄的 MSIR 传染病模型的稳定性*

曹志远，郭俐辉†

(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘 要： 在总人口规模不变的假设下, 建立一类具有自然年龄和染病年龄的 MSIR 传染病模型, 并研究该模型平衡解的稳定性. 首先, 对模型做归一化处理, 并在无病平衡解处线性化, 证明当 $R_1 < 1$ 时, 无病平衡解是局部渐近稳定的. 其次, 利用双曲方程组的特征线方法和 Fatou 引理, 证明当 $R_1 < 1$ 时, 无病平衡解是全局渐近稳定的. 最后, 利用介值定理证明当 $R_1 > 1$ 时, 模型存在唯一的地方病平衡解.

关键词： MSIR 传染病模型; 染病年龄; 平衡解; 存在性

DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316. 2023.11.16.0002

中图分类号： O175.1；R51 **文献标识码：** A **文章编号：** 2096-7675(2024)04-0419-08

引文格式： 曹志远，郭俐辉. 具有自然年龄和染病年龄的 MSIR 传染病模型的稳定性[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文)，2024，41(4)：419-426.

英文引文格式： CAO Zhiyuan, GUO Lihui. The stability of MSIR epidemic model with natural age and infection-age[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)，2024，41(4)：419-426.

The Stability of MSIR Epidemic Model with Natural Age and Infection-Age

CAO Zhiyuan, GUO Lihui

(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： Assuming total population remains constant, this paper establishes a class of MSIR epidemic models with both natural age and infection-age and studies the stability of the equilibrium solutions of this model. Firstly, by normalizing the model and linearizing it at the disease-free equilibrium, demonstrating that when $R_1 < 1$, the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable. Subsequently, employing the method of characteristics for hyperbolic systems and Fatou's lemma, it is proven that when $R_1 < 1$, the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable. Finally, the existence of a unique endemic equilibrium solution is established using the intermediate value theorem when $R_1 > 1$.

Key words： MSIR epidemic model; infection-age; equilibrium solution; existence

0 引 言

二十世纪二三十年代, 由于社会医学和流行病学的迅速发展, Kermack 和 Mckendrick 提出了具有终身免疫的 SIR 传染病模型和非终身免疫的 SIS 传染病模型[1]. 随后, 学者们陆续建立了 SVIR[2], SEIR[3], MSEIS[4], MSEIR[5] 等传染病模型, 并对这些模型的阈值理论进行了深入研究.

流感、肺结核等常见传染病几乎都与自然年龄相关. 自然年龄被引入传染病模型的研究可以溯源至 1974 年, Hoppensteadt[6] 提出了一类具有自然年龄的 SIQR 传染病模型, 为后续受自然年龄影响的传染病模型研究奠定

* **收稿日期：** 2023-11-16
基金项目： 新疆维吾尔自治区自然科学基金“双曲型偏微分方程组初边值问题解的存在性”(2022D01E42).
作者简介： 曹志远(1998—)，男，硕士生，从事偏微分方程及其应用的研究，E-mail：czymath@163.com.
† **通讯作者：** 郭俐辉(1979—)，男，博士，教授，从事偏微分方程及其应用的研究，E-mail：lihguo@126.com.

了基础. 2001 年, Li 等[7]研究了具有自然年龄的 SEIR 传染病模型的阈值理论. 2014 年, 方彬等[8]证明了具有疫苗接种和自然年龄的 SVIR 传染病模型无病平衡解的全局渐近稳定性.

乙肝、AIDS 和 COVID-19 等传染病具有较长染病周期, 这种长周期使得疾病的监测、控制和治疗变得更加复杂. 对于具有较长病程的传染病, 学者们在仓室模型中引入染病年龄. 2010 年, 由守科和闫萍[9]研究了具有染病年龄的 SEIR 传染病模型解的适定性. 随后, 由守科等[10−12]建立了具有染病年龄的 SIQR 和 SIQRS 传染病模型, 并证明了无病平衡解的全局渐近稳定性和地方病平衡解的存在性.

新生儿(被动免疫类)在母体中获得了丰富的免疫球蛋白, 因此拥有先天的免疫力, 具备较强的抗病能力, 不易受到细菌、病毒等外界感染的影响[13]. 2002 年, Li 等[14]在总人口规模不变的假设下, 研究了具有年龄结构的 MSEIR 流行病模型平衡解的存在性. 2005 年, 陈清江等[15]在总人口处于稳定状态下, 分析了具有接种疫苗和二次感染的年龄结构 MSEIR 流行病模型平衡解的稳定性. 2008 年, 方彬和李学志[16]研究了具有年龄结构的 MSEIS 流行病模型, 并证明了该模型无病平衡解的稳定性以及地方病平衡解的存在性.

目前, 已有学者对具有自然年龄、染病年龄或被动免疫类的传染病模型进行了研究, 但尚未对同时涉及“自然年龄、染病年龄和被动免疫类”三个方面的模型阈值理论进行研究. 因此, 我们研究了具有自然年龄和染病年龄的 MSIR 传染病模型的稳定性.

1 模型

将人群分为被动免疫类、易感类、染病类和康复类, 并考虑染病人群的染病年龄, 建立具有自然年龄和染病年龄的 MSIR 传染病模型如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial M(t,x)}{\partial x}=-\delta(x)M(t,x)-\mu(x)M(t,x)\\ \dfrac{\partial S(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial S(t,x)}{\partial x}=\delta(x)M(t,x)-\lambda(t,x)S(t,x)-\mu(x)S(t,x)\\ \dfrac{\partial I(t,x,y)}{\partial t}+\dfrac{\partial I(t,x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial I(t,x,y)}{\partial y}=-\gamma(x,y)I(t,x,y)-\mu(x)I(t,x,y)\\ \dfrac{\partial R(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial R(t,x)}{\partial x}=\displaystyle\int_0^x\gamma(x,y)I(t,x,y)\mathrm{d}y-\mu(x)R(t,x)\\ \lambda(t,x)=\beta(x)\displaystyle\int_0^A\int_0^\xi I(t,\xi,\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\end{cases}\tag{1}$$

定解条件为

$$\begin{cases}M(0,x)=M_0(x),S(0,x)=S_0(x),I(0,x,y)=I_0(x,y),R(0,x)=R_0(x)\\ M(t,0)=\displaystyle\int_0^A b(x)\left[M(t,x)+S(t,x)+\int_0^x I(t,x,y)\mathrm{d}y+R(t,x)\right]\mathrm{d}x\\ S(t,0)=I(t,0,y)=R(t,0)=0\\ I(t,x,0)=\lambda(t,x)S(t,x)\end{cases}\tag{2}$$

模型中函数 $M(t,x)$, $S(t,x)$, $I(t,x,y)$, $R(t,x)$ 分别表示被动免疫类、易感类、染病类和康复类人群的分布密度函数. $M_0(x)$, $S_0(x)$, $I_0(x,y)$, $R_0(x)$ 分别表示被动免疫类、易感类、染病类和康复类人群的初始密度函数. 变量有时间 t, 自然年龄 x, 染病年龄 y, 最大年龄为 A. $x,y\in[0,A]$, 当 $y>x$ 时 $I(t,x,y)=0$. $\mu(x)$, $b(x)$, $\delta(x)$, $\lambda(t,x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x,y)$ 分别表示死亡率、出生率、被动免疫失去率、年龄相关的染病率、发病率、康复率. 且在模型 (1)∼(2) 中有如下假设成立:

(I) $M_0(x)$, $S_0(x)$, $I_0(x,y)$, $R_0(x)$ 在 $x,y\in[0,A)$ 上是非负连续的有界函数, 且 $M_0(x)$, $S_0(x)$, $R_0(x)\in L^1((0,A);R)$, $I_0(x,y)\in L^1((0,A)\times(0,A);R)$.

(II) $b(x)$, $\delta(x)$, $\lambda(t,x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x,y)$ 在 $x,y\in[0,A)$ 上是非负连续的有界函数, $\mu(x)$ 连续且满足

$$\int_0^A\mu(x)\mathrm{d}x=+\infty.$$

模型 (1)~(2) 是非线性双曲方程组, 利用压缩映射原理和先验估计的标准性方法[17], 可以证明非负解的存在性.

2　等价模型

由模型 (1)~(2) 易知, 总人口的密度函数 $P(t,x)$ 定义如下:

$$P(t,x)=M(t,x)+S(t,x)+\int_0^x I(t,x,y)\mathrm{d}y+R(t,x),$$

满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial P(t,x)}{\partial x}=-\mu(x)P(t,x)\\ P(t,0)=\displaystyle\int_0^A b(x)P(t,x)\mathrm{d}x\\ P(0,x)=M_0(x)+S_0(x)+\displaystyle\int_0^x I_0(x,y)\mathrm{d}y+R_0(x)\end{cases}\tag{3}$$

根据文献 [17], 若

$$\int_0^A b(x)e^{-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x=1,$$

则总人口分布处于稳定状态. 定解问题 (3) 存在平衡解

$$P(t,x)=P_\infty(x)=Ne^{-\int_0^x\mu(\tau)\mathrm{d}\tau},$$

其中 N 为新生个体总数.

为方便讨论, 对模型 (1)~(2) 做归一化处理. 将

$$M(t,x)=m(t,x)P_\infty(x),\quad S(t,x)=s(t,x)P_\infty(x),\quad I(t,x,y)=i(t,x,y)P_\infty(x),\quad R(t,x)=r(t,x)P_\infty(x),$$

代入模型 (1)~(2) 可得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial m(t,x)}{\partial x}=-\delta(x)m(t,x)\\ \dfrac{\partial s(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial s(t,x)}{\partial x}=\delta(x)m(t,x)-\lambda(t,x)s(t,x)\\ \dfrac{\partial i(t,x,y)}{\partial t}+\dfrac{\partial i(t,x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial i(t,x,y)}{\partial y}=-\gamma(x,y)i(t,x,y)\\ \dfrac{\partial r(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial r(t,x)}{\partial x}=\displaystyle\int_0^x\gamma(x,y)i(t,x,y)\mathrm{d}y\\ \lambda(t,x)=\beta(x)\displaystyle\int_0^A\int_0^x i(t,x,y)P_\infty(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\end{cases}\tag{4}$$

定解条件为

$$\begin{cases}m(t,x)+s(t,x)+\displaystyle\int_0^x i(t,x,y)\mathrm{d}y+r(t,x)=1\\ m(0,x)=m_0(x),\ s(0,x)=s_0(x),\ i(0,x,y)=i_0(x,y),\ r(0,x)=r_0(x)\\ m(t,0)=1,\ s(t,0)=0,\ i(t,0,y)=0,\ r(t,0)=0\\ i(t,x,0)=\beta(x)\displaystyle\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(\xi)i(t,\xi,\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi s(t,x)\end{cases}\tag{5}$$

接下来, 本文主要通过研究模型 (4)~(5) 来分析传染病模型 (1)~(2) 的稳定性.

3　无病平衡解的稳定性分析

假设 $(m^0(x),s^0(x),i^0(x,y),r^0(x))$ 为模型 (4)~(5) 的平衡解, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}m^0(x)}{\mathrm{d}x}=-\delta(x)m^0(x)\\ \dfrac{\mathrm{d}s^0(x)}{\mathrm{d}x}=\delta(x)m^0(x)-\lambda^0(x)s^0(x)\\ \dfrac{\partial i^0(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial i^0(x,y)}{\partial y}=-\gamma(x,y)i^0(x,y)\\ \dfrac{\mathrm{d}r^0(x)}{\mathrm{d}x}=\displaystyle\int_0^x\gamma(x,y)i^0(x,y)\mathrm{d}y\\ \lambda^0(x)=\beta(x)\displaystyle\int_0^A\int_0^x i^0(x,y)P_\infty(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\ m^0(0)=1,\ s^0(0)=0,\ i^0(0,y)=0,\ r^0(0)=0\\ m^0(x)+s^0(x)+\displaystyle\int_0^x i^0(x,y)\mathrm{d}y+r^0(x)=1\\ i(x,0)=\beta(x)\displaystyle\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(\xi)i^0(\xi,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi s^0(x)\end{cases}\tag{6}$$

显然定解问题 (6) 存在无病平衡解 $\check{E}(\check{m}(x),\check{s}(x),\check{i}(x,y),\check{r}(x))$, 其中

$$\check{m}(x)=e^{-\int_0^x\delta(\tau)\mathrm{d}\tau},\quad \check{s}(x)=1-e^{-\int_0^x\delta(\tau)\mathrm{d}\tau},\quad \check{i}(x,y)=0,\quad \check{r}(x)=0.$$

将模型 (4) 在无病平衡解 $\check{E}$ 处线性化. 设

$$m(t,x)=\check{m}(x)+\widetilde{m}(x)e^{\alpha t},\quad s(t,x)=\check{s}(x)+\widetilde{s}(x)e^{\alpha t},\quad i(t,x,y)=\widetilde{i}(x,y)e^{\alpha t},\quad r(t,x)=\widetilde{r}(x)e^{\alpha t},$$

则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\widetilde{m}(x)}{\mathrm{d}x}=-\alpha\widetilde{m}(x)-\delta(x)\widetilde{m}(x),\\ \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{s}(x)}{\mathrm{d}x}=-\alpha\widetilde{s}(x)+\delta(x)\widetilde{m}(x)-\beta(x)\widetilde{N}\check{s}(x),\\ \dfrac{\partial\widetilde{i}(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial\widetilde{i}(x,y)}{\partial y}=-\alpha\widetilde{i}(x,y)-\gamma(x,y)\widetilde{i}(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}\widetilde{r}(x)}{\mathrm{d}x}=-\alpha\widetilde{r}(x)+\displaystyle\int_0^x\gamma(x,y)\widetilde{i}(x,y)\mathrm{d}y,\\ \widetilde{m}(0)=0,\ \widetilde{s}(0)=0,\ \widetilde{i}(0,y)=0,\ \widetilde{r}(0)=0,\ \widetilde{i}(x,0)=\beta(x)\widetilde{N}\check{s}(x),\end{cases}$$

其中

$$\widetilde{N}=\int_0^A\int_0^x\widetilde{i}(x,y)P_\infty(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

利用特征线法解得

$$\widetilde{i}(x,y)=\begin{cases}0, & x\le y,\\ \beta(x-y)\widetilde{N}\left(1-e^{-\int_0^{x-y}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)e^{-\int_{x-y}^x[\alpha+\gamma(l,l-x+y)]\mathrm{d}l}, & x>y.\end{cases}$$

将 $\widetilde{i}(x,y)$ 代入 $\widetilde{N}$ 可得

$$\widetilde{N}=\int_0^A\int_0^x P_\infty(x)\beta(\xi)\widetilde{N}\left(1-e^{-\int_0^\xi\delta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)e^{-\int_\xi^x[\alpha+\gamma(l,l-\xi)]\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x.$$

上式两边同除以 $\widetilde{N}$, 得

$$1=\int_0^A\int_0^x P_\infty(x)\beta(\xi)\left(1-e^{-\int_0^\xi\delta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)e^{-\int_\xi^x[\alpha+\gamma(l,l-\xi)]\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x.$$

令上式等号右端为关于 α 的函数 $F(\alpha)$

$$F(\alpha):=\int_0^A\int_0^x P_\infty(x)\beta(\xi)\left(1-e^{-\int_0^\xi \delta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)e^{-\int_\xi^x[\alpha+\gamma(l,l-\xi)]\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x.$$

令 $\alpha=0$, 引入再生数

$$R_1=F(0)=\int_0^A\int_0^x P_\infty(x)\beta(\xi)\left(1-e^{-\int_0^\xi \delta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)e^{-\int_\xi^x\gamma(l,l-\xi)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x.$$

定理 1　当 $R_1>1$ 时, 模型 (4)~(5) 无病平衡解 $\check{E}(\check{m}(x),\check{s}(x),\check{i}(x,y),\check{r}(x))$ 是不稳定的; 当 $R_1<1$ 时, 无病平衡解 $\check{E}(\check{m}(x),\check{s}(x),\check{i}(x,y),\check{r}(x))$ 是局部渐近稳定的.

证明　令 $H(\alpha)=F(\alpha)-1$, 显然 $H(\alpha)$ 关于 α 单调递减且连续. 当 $R_1>1$ 时, $H(0)>0$, 且

$$\lim_{\alpha\to+\infty}H(\alpha)=-1<0,$$

根据介值定理可知 $H(\alpha)=0$ 存在唯一正解. 可知当 $R_1>1$ 时, 无病平衡解是不稳定的.

当 $R_1<1$ 时, $H(0)<0$, 又 $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}H(\alpha)=+\infty$, 由介值定理可知 $H(\alpha)=0$ 存在唯一负根 α^*. 另外, 若 $\alpha=a+\mathrm{i}b$ 为 $H(\alpha)=0$ 任意复根, 则

$$F(\alpha^*)=1=|F(a+\mathrm{i}b)|\le F(a),$$

根据 $F(\alpha)$ 的单调递减性知

$$\mathrm{Re}(\alpha)\le\alpha^*<0.$$

所以当 $R_1<1$ 时, 无病平衡解是局部渐近稳定的.

定理 2　如果 $R_1<1$, 则无病平衡解 $\check{E}(\check{m}(x),\check{s}(x),\check{i}(x,y),\check{r}(x))$ 是全局渐近稳定的.

证明　根据特征线法, 模型 (4)~(5) 的解为

$$i(t,x,y)=\begin{cases}i_0(x-t,y-t)e^{-\int_0^t\gamma(x+l-t,y+l-t)\mathrm{d}l}, & x\ge t,\ y>t\\ 0, & x<t,\ x\le y\\ \lambda(t-y,x-y)s(t-y,x-y)e^{-\int_{t-y}^t\gamma(x+l-t,y+l-t)\mathrm{d}l}, & t\ge y,\ x>y\end{cases}\tag{7}$$

$$m(t,x)=\begin{cases}m_0(x-t)e^{-\int_0^t\delta(x+l-t)\mathrm{d}l}, & x>t\\ e^{-\int_0^x\delta(l)\mathrm{d}l}, & x\le t\end{cases}\tag{8}$$

$$r(t,x)=\begin{cases}r_0(x-t)+\int_0^t\int_0^{x+l-t}\gamma(x+l-t,y)i(l,x+l-t,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}l, & x>t\\ \int_0^x\int_0^l\gamma(l,y)i(t+l-x,l,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}l, & x\le t\end{cases}\tag{9}$$

由模型 (5) 可知

$$s(t,x)=1-m(t,x)-\int_0^x i(t,x,y)\mathrm{d}y-r(t,x).$$

令 $\hbar(t,x)=\lambda(t,x)s(t,x)$. 由于 $0\le s(t,x)\le 1-m(t,x)$, 那么当 $t>A$ 时由式 (7) 可得

$$\begin{aligned}\hbar(t,x)&\le\lambda(t,x)(1-m(t,x))\\&=\beta(x)(1-m(t,x))\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(\xi)\lambda(t-\eta,\xi-\eta)s(t-\eta,\xi-\eta)e^{-\int_{t-\eta}^t\gamma(\xi+l-t,\eta+l-t)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\\&=\beta(x)(1-m(t,x))\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(\xi)\hbar(t-\eta,\xi-\eta)e^{-\int_{t-\eta}^t\gamma(\xi+l-t,\eta+l-t)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\\&=\beta(x)(1-m(t,x))\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(\xi)\hbar(t+\sigma-\xi,\sigma)e^{-\int_\sigma^\xi\gamma(\theta,\theta-\sigma)\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

即

$$\hbar(t,x)\leq\beta(x)\left(1-m(t,x)\right)\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(\xi)\hbar(t+\sigma-\xi,\sigma)e^{-\int_\sigma^\xi\gamma(\theta,\theta-\sigma)\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\xi \tag{10}$$

记 $V(x)=\limsup\limits_{t\to+\infty}\hbar(t,x)$, 根据 Fatou 引理, 令不等式 (10) 两端 $t\to+\infty$ 可得

$$V(x)\leq\beta(x)\left(1-e^{-\int_0^x\delta(l)\mathrm{d}l}\right)\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(x)V(\sigma)e^{-\int_\sigma^\xi\gamma(\theta,\theta-\sigma)\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\xi=\beta(x)C\left(1-e^{-\int_0^x\delta(l)\mathrm{d}l}\right) \tag{11}$$

其中

$$C=\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(\xi)V(\sigma)e^{-\int_\sigma^\xi\gamma(\theta,\theta-\sigma)\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\xi,$$

从而

$$C\leq\int_0^A\int_0^\xi P_\infty(\xi)\beta(\sigma)C\left(1-e^{-\int_0^\sigma\delta(l)\mathrm{d}l}\right)e^{-\int_\sigma^\xi\gamma(\theta,\theta-\sigma)\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}\xi=CR_1.$$

若 $R_1<1$, 则 $C=0$, 从而由式 (11) 可得 $V(x)=0$, 即 $\limsup\limits_{t\to+\infty}\hbar(t,x)=0$, 于是由式 (7) 与 (9) 得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}i(t,x,y)=0=\check{i}(x,y),\\&\lim_{t\to+\infty}\lambda(t,x)=0,\\&\lim_{t\to+\infty}r(t,x)=0=\check{r}(x),\end{aligned}$$

代入式 (8) 与模型 (5) 可得

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}m(t,x)=e^{-\int_0^x\delta(\tau)\mathrm{d}\tau}=\check{m}(x),\\&\lim_{t\to+\infty}s(t,x)=1-e^{-\int_0^x\delta(\tau)\mathrm{d}\tau}=\check{s}(x),\end{aligned}$$

所以当 $R_1<1$ 时, 无病平衡解 $\check{E}(\check{m}(x),\check{s}(x),\check{i}(x,y),\check{r}(x))$ 是全局渐近稳定的.

4 地方病平衡解的存在性

定理 3 当 $R_1>1$ 时, 模型 (4)~(5) 存在唯一的地方病平衡解.

证明 设 $\hat{E}(\hat{m}(x),\hat{s}(x),\hat{i}(x,y),\hat{r}(x))$ 为模型 (4)~(5) 的地方病平衡解, 则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\hat{m}(x)}{\mathrm{d}x}=-\delta(x)\hat{m}(x)\\\dfrac{\mathrm{d}\hat{s}(x)}{\mathrm{d}x}=\delta(x)\hat{m}(x)-\hat{\lambda}(x)\hat{s}(x)\\\dfrac{\partial\hat{i}(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial\hat{i}(x,y)}{\partial y}=-\gamma(x,y)\hat{i}(x,y)\\\dfrac{\mathrm{d}\hat{r}(x)}{\mathrm{d}x}=\displaystyle\int_0^x\gamma(x,y)\hat{i}(x,y)\mathrm{d}y\\\hat{\lambda}(x)=\beta(x)\displaystyle\int_0^A\int_0^x\hat{i}(x,y)P_\infty(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\beta(x)\kappa^*\\\hat{m}(x)+\hat{s}(x)+\displaystyle\int_0^x\hat{i}(x,y)\mathrm{d}y+\hat{r}(x)=1\\\hat{m}(0)=1,\ \hat{s}(0)=\hat{i}(0,y)=\hat{r}(0)=0\\\hat{i}(x,0)=\beta(x)\kappa^*\hat{s}(x)\end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\kappa^*:=\int_0^A\int_0^x\hat{i}(x,y)P_\infty(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{13}$$

由模型 (12) 可得

$$\hat{m}(x)=e^{-\int_0^x \delta(s)\mathrm{d}s} \tag{14}$$

$$\hat{s}(x;\kappa^*)=\int_0^x \delta(s)\hat{m}(s)e^{-\int_s^x \beta(h)\kappa^*\mathrm{d}h}\mathrm{d}s \tag{15}$$

$$\hat{i}(x,y;\kappa^*)=\begin{cases}0, & x<y\\ \kappa^*\beta(x-y)\hat{s}(x-y)e^{-\int_0^y \gamma(x+l-y,l)\mathrm{d}l}, & y\le x\end{cases} \tag{16}$$

$$\hat{r}(x;\kappa^*)=\int_0^x\int_0^s \gamma(s,y)\hat{i}(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{17}$$

将式 (16) 代入式 (13) 可得

$$\kappa^*=\int_0^A\int_0^x \kappa^* P_\infty(x)\hat{s}(\xi;\kappa^*)\beta(\xi)e^{-\int_\xi^x \gamma(l,l-\xi)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x,$$

两边同除以 κ^* 可得

$$1=\int_0^A\int_0^x P_\infty(x)\hat{s}(\xi;\kappa^*)\beta(\xi)e^{-\int_\xi^x \gamma(l,l-\xi)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x,$$

令上式等号右端为关于 κ^* 的函数 $G(\kappa^*)$,

$$G(\kappa^*):=\int_0^A\int_0^x P_\infty(x)\hat{s}(\xi;\kappa^*)\beta(\xi)e^{-\int_\xi^x \gamma(l,l-\xi)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x \tag{18}$$

一方面, 当 $\kappa^*=0$ 时, 根据式 (16) 和 (17) 可知

$$\hat{i}(x,y;0)=0,\quad \hat{r}(x;0)=0.$$

再根据式 (12) 和 (14) 可得

$$\hat{s}(x;0)=1-e^{-\int_0^x \delta(s)\mathrm{d}s}.$$

从而

$$\begin{aligned}G(0)&=\int_0^A\int_0^x P_\infty(x)\beta(\xi)\hat{s}(\xi;0)e^{-\int_\xi^x \gamma(l,l-\xi)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\&=\int_0^A\int_0^x P_\infty(x)\beta(\xi)\left(1-e^{-\int_0^\xi \delta(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)e^{-\int_\xi^x \gamma(l,l-\xi)\mathrm{d}l}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x\\&=R_1,\end{aligned}$$

另一方面, 当 $\kappa^*>0$ 时, 注意到 $0<\int_0^x \hat{i}(x,y;\kappa^*)\mathrm{d}y<1$, 则

$$G(\kappa^*)=\frac{1}{\kappa^*}\int_0^A\int_0^x \hat{i}(x,y;\kappa^*)P_\infty(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x<\frac{1}{\kappa^*}\int_0^A P_\infty(x)\mathrm{d}x=\frac{N_\infty}{\kappa^*},$$

其中 N_∞ 为总人口数. 当 $\kappa^*=N_\infty$ 时, $G(N_\infty)<1$. 由于 $G(\kappa^*)$ 是关于 κ^* 的单调递减函数, 并且当 $R_1>1$ 时, 有 $G(0)>1$. 故式 (18) 在 $(0,N_\infty)$ 上存在唯一的正根 $\hat{\kappa}^*$. 即, 当 $R_1>1$ 时, 模型 (4)~(5) 存在唯一的地方病平衡解.

5　结 论

讨论了一类具有自然年龄和染病年龄的 MSIR 传染病模型的稳定性. 运用积分方程和微分方程的理论证明了当再生数 $R_1<1$ 时, 无病平衡解是局部渐近稳定的. 当 $R_1<1$ 时, 无病平衡解是全局渐近稳定的. 当再生数 $R_1>1$ 时, 无病平衡解不稳定, 但存在唯一的地方病平衡解.

参考文献:

[1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. Contributions to the mathematical theory of epidemics-I[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 1991, 53(1): 33-55.

[2] SUN D D, TENG Z D, WANG K, et al. Stability and Hopf bifurcation in delayed age-structured SVIR epidemic model with vaccination and incubation[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, 168: 113206.

[3] HE S B, PENG Y X, SUN K H. SEIR modeling of the COVID-19 and its dynamics[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 101(3): 1667-1680.

[4] 方彬,杨金根,李学志. 潜伏期和染病期均具有康复的年龄结构 MSEIS 流行病模型的稳定性[J]. 应用数学, 2009, 22(1): 90-100.
FANG B, YANG J G, LI X Z. Stability of an age-structured MSEIS epidemic model with recovery both in latent period and in infectious period[J]. Mathematica Applicata, 2009, 22(1): 90-100. (in Chinese)

[5] ALMEIDA R, BRITO DA CRUZ A M C, MARTINS N, et al. An epidemiological MSEIR model described by the Caputo fractional derivative[J]. International Journal of Dynamics and Control, 2019, 7(2): 776-784.

[6] HOPPENSTEADT F. An age dependent epidemic model[J]. Journal of the Franklin Institute, 1974, 297(5): 325-333.

[7] LI X Z, GUPUR G, ZHU G T. Threshold and stability results for an age-structured SEIR epidemic model[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2001, 42(6/7): 883-907.

[8] 方彬, 蔡礼明, 马凌霄. 一类带有接种和年龄结构的 SVIR 传染病模型[J]. 生物数学学报, 2014, 29(2): 347-353.
FANG B, CAI L M, MA L X. An age-structured SVIR epidemic model with vaccination[J]. Journal of Biomathematics, 2014, 29(2): 347-353. (in Chinese)

[9] 由守科, 闫萍. 一类具有潜伏期和染病年龄的 SEIR 传染病模型[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2010, 27(3): 288-297.
YOU S K, YAN P. A class of SEIR epidemic model with latent period and infectious age[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2010, 27(3): 288-297. (in Chinese)

[10] 由守科, 俞芳. 一类具有隔离和接种的年龄结构的 SIQR 传染病模型分析[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2013, 30(2): 177-182.
YOU S K, YU F. Analysis of an age-structured SIQR epidemic model with quarantine and vaccination[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition), 2013, 30(2): 177-182. (in Chinese)

[11] 王时雯, 由守科. 具有自然年龄和染病年龄的 SIQRS 传染病模型的稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(2): 163-171.
WANG S W, YOU S K. The stability of SIQRS epidemic model with natural age and infection-age[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2022, 52(2): 163-171. (in Chinese)

[12] 王时雯, 由守科. 具有自然年龄和染病年龄的 SIQS 传染病模型的稳定性[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2022, 36(11): 274-281.
WANG S W, YOU S K. The stability of SIQS epidemic model with natural age and infection-age[J]. Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science), 2022, 36(11): 274-281. (in Chinese)

[13] 粟丹, 赵春. 具有垂直传染和年龄结构的 MSEIR 传染病模型的稳定性[J]. 天津师范大学学报(自然科学版), 2020, 40(6): 9-13+18.
SU D, ZHAO C. Stability of an age-structured MSEIR epidemic model with vertical transmission[J]. Journal of Tianjin Normal University(Natural Science Edition), 2020, 40(6): 9-13+18. (in Chinese)

[14] LI X Z, GUPUR G, ZHU G T. Existence and uniqueness of endemic states for the age-structured MSEIR epidemic model[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2002, 18(3): 441-454.

[15] 陈清江, 李学志, 代丽霞. 带接种疫苗和二次感染的年龄结构 MSEIR 流行病模型分析[J]. 系统科学与数学, 2005, 25(4): 385-397.
CHEN Q J, LI X Z, DAI L X. Analysis of an age-structured MSEIR epidemic model with vaccination and the loss of immunity[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2005, 25(4): 385-397. (in Chinese)

[16] 方彬, 李学志. 潜伏期具有传染性的年龄结构 MSEIS 流行病模型的稳定性[J]. 应用数学学报, 2008, 31(1): 110-125.
FANG B, LI X Z. Stability of an age-structured MSEIS epidemic model with infectivity in latent period[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2008, 31(1): 110-125. (in Chinese)

[17] WEBB G F. Theory of nonlinear age-dependent population dynamics[M]. New York: Marcel Dekker, 1985.

责任编辑: 赵新科