

基于模糊 n -cell 数的多准则双边匹配决策方法*

李榕, 叶国菊[†], 刘尉

(河海大学 数学学院, 江苏 南京 210024)

摘要: 提出一种基于模糊 n -cell 数的新方法, 解决多准则双边匹配问题. 首先, 利用最大离差法计算各个匹配对象的准则权重; 其次, 基于数据的均值和左/右离散度构造模糊 n -cell 数, 并计算得分函数, 建立以双方主体满意度最大化为目标的匹配模型, 通过求解该模型得到最优匹配决策方案. 最后, 通过企业和求职者之间双向选择的实例, 验证所提方法的可行性.

关键词: 多准则决策; 模糊 n -cell 数; 双边匹配模型; 最大离差法

DOI: 10.13568/j.cnki.651094.651316.2024.07.05.0002

中图分类号: O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2025)02-0145-011

引文格式: 李榕, 叶国菊, 刘尉. 基于模糊 n -cell 数的多准则双边匹配决策方法[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2025, 42(2): 145-155.

英文引文格式: LI Rong, YE Guoju, LIU Wei. Multi-criteria two-sided matching decision method based on fuzzy n -cell numbers[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2025, 42(2): 145-155.

Multi-Criteria Two-Sided Matching Decision Method Based on Fuzzy n -cell Numbers

LI Rong, YE Guoju, LIU Wei

(School of Mathematics, Hohai University, Nanjing Jiangsu 210024, China)

Abstract: This paper proposes a new method based on fuzzy n -cell numbers to solve the multi-criteria two-sided matching problem. Firstly, the maximum deviation method is used to calculate the criterion weights for each matching object. Secondly, fuzzy n -cell numbers are constructed based on the mean values and left/right dispersion degrees of the data, followed by the computation of score functions. A matching model aimed at maximizing the satisfaction of both objects is established, and the optimal matching decision scheme is obtained by solving this model. Finally, the feasibility of the proposed method is demonstrated through an example of two-way selection between enterprises and job seekers.

Key words: multi-criteria decision; fuzzy n -cell number; two-sided matching model; maximum deviation method

0 引言

实际生活中, 双边匹配广泛存在于各方面, 如未婚男女的婚配问题、高考学生与高校之间的选择问题、毕业生与企业之间的就业问题等, 都涉及本文所提的双边匹配概念. 同一般经典的决策匹配方法相比, 双边匹配同时兼顾双方主体需求, 在双方满意度最大化的情况下, 得到模型的最优匹配方案, 故双边匹配的研究具有一定的意义和价值.

* 收稿日期: 2024-07-05

基金项目: 江苏省研究生科研与实践创新计划项目“基于模糊集理论的优化问题及其应用研究”(KYCX23.0668).

作者简介: 李榕(2001—), 女, 硕士生, 从事模糊数学的研究, E-mail: lirong11280204@163.com.

[†] 通讯作者: 叶国菊(1965—), 女, 教授, 博士生导师, 主要从事泛函分析及广义微分方程、数学与交叉学科的研究, E-mail: Ygjhhu@163.com.

早在1962年,双边匹配问题的概念由Gale和Shapley两位学者针对婚姻匹配问题提出,其中Shapley建立的稳定匹配理论^[1]对最大匹配和稳定匹配进行了明确的区分,并且提出“Gale-Shapley”算法.随后Roth成功将“Gale-Shapley”算法应用于实际^[2],并且提出一对多稳定匹配的“Hospital-Resident”算法^[3].Shapley和Roth因此获得2012年的诺贝尔奖.

此后,双边匹配的概念引起国内外大量学者的兴趣,至今仍旧得到广泛关注,并且被不断完善和丰富.近年来,对评估信息为序值、序关系以及语言术语集等双边匹配问题的研究非常广泛,吴澎等^[4]基于TOPSIS方法通过犹豫模糊元解决双边匹配问题,乐琦等基于不完全序值信息^[5]、完全序值信息^[6]建立双边匹配优化模型,Li等^[7]基于双犹豫模糊偏好信息建立双边匹配模型解决复杂产品制造任务,Zhang等^[8-10]从犹豫模糊语言术语集入手,将语言评估转化为数值信息建立双边匹配模型,乔剑敏等基于区间直觉模糊集建立单阶段^[11]、多阶段^[12]动态双边匹配模型,王磊等^[13]针对多粒度概率语言下信息丢失及未考虑主体心理行为的问题,提出基于累积前景理论的多粒度概率语言非对称正态云双边匹配决策方法,彭娟娟等^[14]提出基于改进TODIM的图片模糊双边稳定匹配决策方法.

当前,双边匹配研究已在多领域取得显著进展,成功解决了诸多实际问题.但是,现有双边匹配方法存在局限:匹配对象作为决策者仅给出综合评价,而在实际生活中,由于文化背景和教育理念的不同,不同的决策者对于评估准则的内涵理解存在差异,同一决策者在不同情境下对准则权重的分配具有动态变化.因此,实施多准则评分与差异化赋权至关重要.本文在收集整理决策者评估信息后,通过构造模糊 n -cell数对匹配对象进行多维评估,并且充分考虑决策者因文化背景和教育理念不同而对内涵理解存在差异,求解带有不完全准则权重的数学模型,并计算得分函数,最后建立双边匹配模型得到最优配对.相比现有文献方法在解决双边匹配问题过程中采用的综合评价,本文提出的解决方法更符合实际.

1 预备知识

1.1 双边匹配概念的描述

首先介绍双边匹配基本定义.在双边匹配问题中,记双方主体为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 和 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$,其中: A_i 表示 A 中的第 i 个匹配对象, B_j 表示 B 中的第 j 个匹配对象, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$,并且假设 $m \leq n$.

定义 1^[15] 设 $T: A \cup B \rightarrow A \cup B$, T 是一个一一映射,当 $\forall A_i \in A, \forall B_j \in B$ 满足以下三条:

- 1) $T(A_i) \in B$;
- 2) $T(B_j) \in A \cup B_j$;
- 3) $T(A_i) = B_j$ 当且仅当 $T(B_j) = A_i$;

则称 T 为双边匹配.定义1中, $T(A_i) = B_j$ 表示 A_i 与 B_j 匹配, $T(B_j) = B_j$ 表示 A 中没有任何一项与 B_j 匹配.根据假设 $m \leq n$,可知 A 中的任一项在 B 中存在一个 B_j 与之匹配,而 B 中则有 $m - n$ 项没有匹配项.

下面介绍稳定匹配的定义.

定义 2^[16-17] 记 s_{ij}^A 和 s_{ij}^B 分别为 A_i 对 B_j 的满意度以及 B_j 对 A_i 的满意度.当出现以下两种情况之一:

- 1) $\exists A_i, A_l \in A, B_j, B_k \in B, T(A_i) = B_k, T(A_l) = B_j$,使得 $s_{ij}^A > s_{ik}^A$ 以及 $s_{ij}^B > s_{lj}^B$;
- 2) $\exists A_i \in A, B_j, B_k \in B, T(A_i) = B_k, T(B_j) = B_j$,使得 $s_{ij}^A > s_{ik}^A$;

则称 T 是不稳定的;否则,称 T 是稳定匹配.定义2表示,如果 A_i 和 B_k 配对, A_l 和 B_j 配对,但是 A_i 对 B_j 的满意度比对 B_k 的大,并且 B_j 对 A_i 的满意度比对 A_l 的大时,那么 A_i 和 B_j 可能会放弃当前的配对并且形成新的配对.另外,如果 A_i 和 B_k 配对, B_j 没有匹配项,但是 A_i 对 B_j 的满意度比对 B_k 的大,那么 A_i 可能会放弃和 B_k 的配对,转而和 B_j 配对.这两种情况下 T 是不稳定的,除此之外,称 T 是稳定匹配.

1.2 模糊 n -cell数

设 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow I = [0, 1]$, u 是 \mathbb{R}^n 上的一个模糊集,任取 $r \in (0, 1]$,记 $[u]^r$ 为模糊集 u 的 r 截集,其中 $[u]^r = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq r\}$.

定义 3^[18] 若模糊集 u 满足以下四条:

- 1) u 是正规的,即 $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $u(x_0) = 1$;

- 2) \mathbf{u} 是模糊凸的, 即 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \lambda \leq 1$ 使得 $\mathbf{u}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(y)\}$;
 3) \mathbf{u} 是上半连续的, 即 $\forall x_k \in \mathbb{R}^n (k=0, 1, \dots, n), x_k \rightarrow x_0$ 使得 $\mathbf{u}(x_0) \geq \overline{\lim_{x \rightarrow \infty} u(x_k)}$;
 4) $[\mathbf{u}]^0$ 是紧的;

则称 \mathbf{u} 是一个 n 维模糊数. 全体 n 维模糊数的集合记作 \mathbb{E}^n .

定义 4^[18] 如果 $\mathbf{u} \in \mathbb{E}^n$, 并且对于任意的 $r \in [0, 1]$, $[\mathbf{u}]^r$ 是一个 n 维方体, 即 $[\mathbf{u}]^r$ 可以表示为

$$\Pi_{i=1}^n [\underline{u}_i(r), \overline{u}_i(r)] = [\underline{u}_1(r), \overline{u}_1(r)] \times [\underline{u}_2(r), \overline{u}_2(r)] \times \dots \times [\underline{u}_n(r), \overline{u}_n(r)], \quad (1)$$

式中: $\underline{u}_i(r), \overline{u}_i(r) \in \mathbb{R}$, 且满足 $\underline{u}_i(r) \leq \overline{u}_i(r), r \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, n$, 则称 \mathbf{u} 是一个模糊 n -cell 数. 记所有模糊 n -cell 数构成的集合为 $L(\mathbb{E}^n)$.

2 基于模糊 n -cell 数的多准则双边匹配决策模型

本文提出一种基于模糊 n -cell 数的新方法, 用于解决多准则双边匹配问题. 首先, 对过程中涉及的数学符号做出阐释. 其次, 采用最大离差法补全缺失的准则权重. 接着, 构造模糊 n -cell 数并求解其得分函数. 最后, 建立双边匹配优化模型, 通过相关软件求解得到最优配对方案.

2.1 符号说明

双边匹配问题中, 通常涉及 A 和 B 两个匹配对象集. 为实现匹配双方的选择都达到最优, 需要匹配双方根据既定的准则同时给出相应的评估信息和准则权重信息. 下面给出决策过程中涉及的符号.

$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$: 多准则双边匹配决策模型中一边匹配对象的集合, A_i 表示 A 中的第 i 个匹配对象, $i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$.

$B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$: 多准则双边匹配决策模型中另外一边匹配对象的集合, B_j 表示 B 中的第 j 个匹配对象, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$.

$C^A = \{C_1^A, C_2^A, \dots, C_{q_A}^A\}$: 对 B 中匹配对象进行评估时, A 中决策者评估准则的集合, C_k^A 表示 C^A 中的第 k 个准则, $k = 1, 2, \dots, q_A$, q_A 是 A 中决策者使用的评估准则数量.

$C^B = \{C_1^B, C_2^B, \dots, C_{q_B}^B\}$: 对 A 中匹配对象进行评估时, B 中决策者评估准则的集合, C_l^B 表示 C^B 中的第 l 个准则, $l = 1, 2, \dots, q_B$, q_B 是 B 中决策者使用的评估准则数量.

$\omega^{A_i} = (\omega_1^{A_i}, \omega_2^{A_i}, \dots, \omega_{q_A}^{A_i})^\top$: A_i 评估的准则权重向量, $\omega_k^{A_i}$ 是 C^A 中第 k 个准则的权重, $\omega_k^{A_i} > 0, k = 1, 2, \dots, q_A$, 并且 $\sum_{k=1}^{q_A} \omega_k^{A_i} = 1, i \in I$.

$\omega^{B_j} = (\omega_1^{B_j}, \omega_2^{B_j}, \dots, \omega_{q_B}^{B_j})^\top$: B_j 评估的准则权重向量, $\omega_l^{B_j}$ 是 C^B 中第 l 个准则的权重, $\omega_l^{B_j} > 0, l = 1, 2, \dots, q_B$, 并且 $\sum_{l=1}^{q_B} \omega_l^{B_j} = 1, j \in J$.

$\mathbf{R}^i = (r_{jk}^i)_{n \times q_A}$: A_i 对 B 中匹配对象的评估矩阵, r_{jk}^i 表示决策者 A_i 关于准则 C_k^A 对匹配对象 B_j 的评估信息, $j \in J, k = 1, 2, \dots, q_A$.

$\mathbf{T}^j = (t_{il}^j)_{m \times q_B}$: B_j 对 A 中匹配对象的评估矩阵, t_{il}^j 表示决策者 B_j 关于准则 C_l^B 对匹配对象 A_i 的评估信息, $i \in I, l = 1, 2, \dots, q_B$.

2.2 计算评估准则权重

通过系统采集并处理评估数据, 构建双边匹配评估矩阵, A_i 的评估矩阵记为 $\mathbf{R}^i, i = 1, 2, \dots, m$, B_j 的评估矩阵记为 $\mathbf{T}^j, j = 1, 2, \dots, n$.

在多准则决策过程中, 决策者常因时间约束和认知局限难以准确给出准则权重, 而权重赋值对后续计算具有关键影响. 因此, 构造模糊 n -cell 数前需预先确定各决策者的准则权重向量, 本文使用最大离差法计算不完全的准则权重, 该方法最先由 Wang^[19] 提出并用于解决多属性决策问题, 其基本原理是离差值越大, 说明该变量对目标函数的影响程度越大. 基于变量离差值大小可确定各准则的权重分配.

当决策者无法提供完整的准则权重信息时, 依据最大离差法, 决策者 A_i 关于第 k 个准则的评估偏差为:

$$dev_k^{A_i} = \sum_{j \neq p} |a_{jk} - a_{pk}|. \quad (2)$$

进一步,考虑决策者 A_i 对所有准则的偏差和为:

$$dev^{A_i} = \sum_{k=1}^{q_A} dev_k^{A_i} \omega_k^{A_i} = \sum_{k=1}^{q_A} \sum_{j \neq p} |a_{jk} - a_{pk}| \omega_k^{A_i}. \quad (3)$$

A_i 评估准则权重的优化模型为:

$$\begin{cases} \max & \sum_{k=1}^{q_A} \sum_{j \neq p} |a_{jk} - a_{pk}| \omega_k^{A_i}, \\ \text{s.t.} & \sum_{k=1}^{q_A} \omega_k^{A_i} = 1, \\ & \omega_k^{A_i} \geq 0, k = 1, 2, \dots, q_A, \end{cases} \quad (4)$$

式(4)是简单线性规划模型,通过解这一模型,可以得到决策者 A_i 的准则权重向量:

$$\omega^{A_i} = (\omega_{k_1}^{A_i}, \omega_{k_2}^{A_i}, \dots, \omega_{k_{q_A}}^{A_i})^\top, i \in I = \{1, 2, \dots, m\}. \quad (5)$$

类似的,当 B_j 的评估准则权重不完全时,也可以建立如下优化模型求解 B_j 的评估权重向量:

$$\begin{cases} \max & \sum_{l=1}^{q_B} \sum_{i \neq q} |a_{il} - a_{ql}| \omega_l^{B_j}, \\ \text{s.t.} & \sum_{l=1}^{q_B} \omega_l^{B_j} = 1, \\ & \omega_l^{B_j} \geq 0, l = 1, 2, \dots, q_B, \end{cases} \quad (6)$$

得到决策者 B_j 的评估权重向量,记为: $\omega^{B_j} = (\omega_{l_1}^{B_j}, \omega_{l_2}^{B_j}, \dots, \omega_{l_{q_B}}^{B_j})^\top, j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$.

2.3 构造模糊 n -cell 数并计算得分函数

准则权重确定后,进一步计算数据的均值和左/右离散度构造模糊 n -cell 数,并且计算其得分函数.以决策者 A_1 的评估矩阵为例构造模糊 n -cell 数并计算其得分函数, A_1 的评估矩阵为:

$$R^1: \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ \dots \\ B_n \end{matrix} \begin{bmatrix} r_{11}^1 & r_{12}^1 & \dots & r_{1q_A}^1 \\ r_{21}^1 & r_{22}^1 & \dots & r_{2q_A}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1}^1 & r_{n2}^1 & \dots & r_{nq_A}^1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

根据2.2节的计算,决策者 A_i 的准则权重向量为 $\omega^{A_i} = (\omega_1^{A_i}, \omega_2^{A_i}, \dots, \omega_{q_A}^{A_i})^\top, i = 1, 2, \dots, m$. 其中 A_1 的准则权重向量为 $\omega^{A_1} = (\omega_1^{A_1}, \omega_2^{A_1}, \dots, \omega_{q_A}^{A_1})^\top$. 计算决策者 A_1 对所有匹配对象的加权评估值:

$$\mu_j^1 = \sum_{k=1}^{q_A} \omega_k^{A_1} r_{jk}^1, j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

接着计算左/右离散度分别为:

$$L^1 \sigma_j = \frac{1}{N_{L_i}} \sum_{r_{jk}^1 < \mu_j} (\mu_j - r_{jk}^1), j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

$$R^1 \sigma_j = \frac{1}{N_{R_i}} \sum_{r_{jk}^1 > \mu_j} (r_{jk}^1 - \mu_j), j = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

基于均值和左/右离散度构造出 n 个1维的模糊数: $u_j^1 = (L^1 \sigma_j, \mu_j^1, R^1 \sigma_j), j = 1, 2, \dots, n$, 从而得到模糊 n -cell 数 $u^1 = (u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1)$. 本文假设决策者具有相同的权重,决策者评估的得分函数为 $s^A(u_j^1) = \frac{L^1 \sigma_j + \mu_j^1 + R^1 \sigma_j}{3}, j = 1, 2, \dots, n$.

于是得到双方的得分矩阵:(记 $s^A(u_j^i)$ 为 s_{ij}^A)

$$S^A = (s_{ij}^A)_{m \times n} = \begin{bmatrix} s_{11}^A & s_{12}^A & \cdots & s_{1n}^A \\ s_{21}^A & s_{22}^A & \cdots & s_{2n}^A \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m1}^A & s_{m2}^A & \cdots & s_{mn}^A \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$S^B = (s_{ij}^B)_{m \times n} = \begin{bmatrix} s_{11}^B & s_{12}^B & \cdots & s_{1n}^B \\ s_{21}^B & s_{22}^B & \cdots & s_{2n}^B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m1}^B & s_{m2}^B & \cdots & s_{mn}^B \end{bmatrix}. \quad (12)$$

2.4 建立双边匹配决策模型

基于得分矩阵, 构建考虑稳定匹配约束的双边匹配决策模型, 以确定最优匹配对.

首先, 引入 Boolean 变量 x_{ij} , 即

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & T(A_i) = B_j, \\ 0, & T(A_i) \neq B_j. \end{cases} \quad (13)$$

式 (13) 表示 A_i 与 B_j 匹配时, $x_{ij} = 1$, 否则 $x_{ij} = 0$. Roth^[2] 和 Echenique^[16] 等提出如下稳定匹配条件:

$$\sum_{s_{ih}^A > s_{ij}^A} x_{ih} + \sum_{s_{kj}^B > s_{ij}^B} x_{kj} + x_{ij} \geq 1, i \in I, j \in J. \quad (14)$$

基于得分矩阵 S^A 和 S^B 以及式 (14), 以双方匹配对象满意度最大化为目标, 构建如下双边优化模型:

$$\begin{cases} \max & Z_1 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s_{ij}^A x_{ij}, \\ \max & Z_2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n s_{ij}^B x_{ij}, \\ s.t. & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in I, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j \in J, \\ & \sum_{s_{ih}^A > s_{ij}^A} x_{ih} + \sum_{s_{kj}^B > s_{ij}^B} x_{kj} + x_{ij} \geq 1, i \in I, j \in J, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \end{cases} \quad (15)$$

式 (15) 的 Z_1 和 Z_2 分别代表 A 和 B 中匹配对象作为决策者的总体满意度, 其中: 第一个约束保证 A 中的每个匹配对象都有 B 中的一个匹配对象与之匹配, 而第二个约束保证 B 中的每个匹配对象最多与 A 中一个匹配对象匹配. 此外, 第三个约束条件保证了该匹配模型是稳定的.

然后, 引入参数 $\lambda \in (0, 1)$, 进一步将式 (15) 转化为单目标函数优化模型:

$$\begin{cases} \max & Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\lambda s_{ij}^A x_{ij}) + (1 - \lambda) s_{ij}^B x_{ij}, 0 < \lambda < 1, \\ s.t. & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in I, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j \in J, \\ & \sum_{s_{ih}^A > s_{ij}^A} x_{ih} + \sum_{s_{kj}^B > s_{ij}^B} x_{kj} + x_{ij} \geq 1, i \in I, j \in J, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \end{cases} \quad (16)$$

式 (16) 中, 参数 λ 表示匹配双方意愿的重要程度, $0.5 < \lambda < 1$ 时, 表示 A 中匹配对象的意愿更加重要; $0 < \lambda < 0.5$ 时, 表示 B 中匹配对象的意愿更加重要. 本文假设匹配双方的意愿同等重要, 取 $\lambda = 0.5$. 构建最终的匹配优

化模型:

$$\begin{cases} \max & Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (0.5s_{ij}^A x_{ij} + 0.5s_{ij}^B x_{ij}), \\ \text{s.t.} & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in I, \\ & \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j \in J, \\ & \sum_{s_{ih}^A > s_{ij}^A} x_{ih} + \sum_{s_{kj}^B > s_{ij}^B} x_{kj} + x_{ij} \geq 1, i \in I, j \in J, \\ & x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \end{cases} \quad (17)$$

最后,使用Lingo软件求解式(17),得到最优匹配矩阵 X .

3 算例分析

本文考虑企业职位和求职人员之间的匹配问题.某地同期有4家企业 A_1, A_2, A_3, A_4 在进行专业人员的招聘活动,现有5名求职人员 B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 应聘,且每家企业仅招聘一名专业人员.为在企业职位和求职人员之间做出最合适的匹配,每家企业和每位求职人员都根据不同准则给出了评估信息,评估准则如表1和表2所示.另外,每家企业和每位求职人员也给出了准则权重信息,如表3和表4所示.

表 1 企业招聘的准则

C_k^A	评估准则
C_1^A	沟通能力
C_2^A	团队合作能力
C_3^A	计算机技能
C_4^A	外语能力

表 2 求职者应聘的准则

C_l^B	评估准则
C_1^B	薪资福利
C_2^B	五险一金
C_3^B	工作时长及假期
C_4^B	出差情况
C_5^B	办公环境

表 3 企业招聘的准则权重信息

A_i	权重信息
A_1	$\omega_1^{A_1} - \omega_2^{A_1} \geq 0.15, 0.1 \leq \omega_2^{A_1} \leq 0.2, \omega_4^{A_1} = 2 \omega_2^{A_1}, \omega_3^{A_1} \geq \omega_4^{A_1}$
A_2	$\omega^{A_2} = (0.25, 0.1, 0.45, 0.2)^T$
A_3	$0.1 \leq \omega_1^{A_3} \leq 0.15, \omega_1^{A_3} + \omega_2^{A_3} \leq 0.4, \omega_3^{A_3} \leq \omega_4^{A_3}$
A_4	$\omega^{A_4} = (0.2, 0.25, 0.1, 0.45)^T$

表 4 求职者应聘的准则权重信息

B_j	权重信息
B_1	$\omega^{B_1} = (0.3, 0.2, 0.1, 0.2, 0.2)^T$
B_2	$\omega^{B_2} = (0.2, 0.2, 0.1, 0.2, 0.3)^T$
B_3	$\omega_1^{B_3} = 1.5 \omega_2^{B_3}, \omega_2^{B_3} \geq \omega_5^{B_3}, \omega_3^{B_3} \geq 0.15, \omega_4^{B_3} - \omega_1^{B_3} \geq 0.2$
B_4	$\omega_1^{B_4} \geq 0.2, 0.15 \leq \omega_3^{B_4} \leq 0.3, \omega_4^{B_4} = 2 \omega_2^{B_4}, \omega_4^{B_4} \leq 0.5$
B_5	$\omega^{B_5} = (0.25, 0.25, 0.1, 0.2, 0.2)^T$

由4家企业给出的评估矩阵(记为 $R^i, i=1,2,3,4$)和5位求职者给出的评估矩阵(记为 $T^j, j=1,2,3,4,5$)分别如下所示.

$$\mathbf{R}^1: \begin{bmatrix} 5.0 & 4.5 & 4.0 & 3.5 \\ 1.5 & 2.0 & 2.5 & 4.0 \\ 5.5 & 4.5 & 3.5 & 5.0 \\ 2.0 & 2.5 & 2.0 & 5.5 \\ 3.5 & 5.0 & 0.5 & 2.5 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{R}^2: \begin{bmatrix} 5.0 & 7.0 & 5.5 & 6.0 \\ 5.5 & 6.5 & 6.0 & 7.5 \\ 5.0 & 6.0 & 7.5 & 6.5 \\ 6.5 & 5.5 & 6.0 & 5.5 \\ 5.0 & 5.5 & 8.0 & 7.5 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{R}^3: \begin{bmatrix} 4.5 & 4.0 & 1.5 & 3.0 \\ 3.0 & 4.5 & 3.0 & 4.5 \\ 5.0 & 5.0 & 5.5 & 6.0 \\ 3.5 & 4.0 & 4.5 & 5.5 \\ 4.5 & 6.0 & 2.0 & 4.5 \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$\mathbf{R}^4: \begin{bmatrix} 7.0 & 8.0 & 6.0 & 3.0 \\ 4.0 & 7.0 & 3.0 & 1.0 \\ 3.0 & 4.0 & 1.0 & 4.0 \\ 6.0 & 6.0 & 5.0 & 5.0 \\ 6.0 & 3.0 & 4.0 & 8.0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\mathbf{T}^1: \begin{bmatrix} 8.0 & 6.0 & 6.0 & 7.0 & 6.0 \\ 8.0 & 4.0 & 3.0 & 8.0 & 6.0 \\ 5.0 & 3.0 & 6.0 & 6.0 & 1.0 \\ 4.0 & 7.0 & 8.0 & 3.0 & 6.0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbf{T}^2: \begin{bmatrix} 4.0 & 4.0 & 7.0 & 3.0 & 5.0 \\ 8.0 & 3.0 & 6.0 & 4.0 & 7.0 \\ 7.0 & 6.0 & 8.0 & 5.0 & 3.0 \\ 6.0 & 4.0 & 4.0 & 6.0 & 8.0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\mathbf{T}^3: \begin{bmatrix} 4.5 & 3.0 & 5.0 & 2.5 & 5.5 \\ 5.0 & 6.0 & 4.5 & 4.0 & 2.5 \\ 3.5 & 4.0 & 5.0 & 5.0 & 5.0 \\ 6.0 & 3.5 & 4.5 & 3.5 & 5.0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{T}^4: \begin{bmatrix} 5.5 & 7.0 & 7.0 & 8.0 & 6.5 \\ 7.0 & 5.5 & 6.0 & 5.5 & 6.0 \\ 6.5 & 5.0 & 7.0 & 5.0 & 8.0 \\ 7.0 & 5.5 & 6.5 & 6.0 & 7.0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{T}^5: \begin{bmatrix} 5.0 & 4.5 & 4.5 & 6.0 & 6.0 \\ 5.0 & 3.5 & 5.0 & 6.5 & 7.0 \\ 6.0 & 5.5 & 3.5 & 6.0 & 6.5 \\ 3.5 & 7.0 & 6.5 & 7.0 & 6.0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

由于部分匹配对象存在准则权重信息缺失的情况,根据2.2节最大离差法计算表3和表4中不完全的准则权重信息.本文中,以匹配对象 A_1 为例计算准则权重.通过式(2)有: $dev_1^{A_1} = 44, dev_2^{A_1} = 32, dev_3^{A_1} = 34, dev_4^{A_1} = 30$,建立如下模型:

$$\begin{cases} \max 44\omega_1^{A_1} + 32\omega_2^{A_1} + 34\omega_3^{A_1} + 30\omega_4^{A_1}, \\ s.t. \omega_1^{A_1} + \omega_2^{A_1} + \omega_3^{A_1} + \omega_4^{A_1} = 1, \\ \omega_k^{A_1} \geq 0, k = 1, 2, 3, 4, \\ \omega_1^{A_1} - \omega_2^{A_1} \geq 0.15, \\ 0.1 \leq \omega_2^{A_1} \leq 0.2, \\ \omega_4^{A_1} = 2\omega_2^{A_1}, \\ \omega_3^{A_1} \geq \omega_4^{A_1}. \end{cases} \quad (27)$$

通过Lingo软件求解式(27),可以得到匹配对象 A_1 的准则权重向量为 $\omega^{A_1} = (0.5, 0.1, 0.2, 0.2)^T$.采用相同方法,可以推导其他准则权重信息不完全的匹配对象的权重向量,具体结果如表5所示.

表5 匹配对象的准则权重向量

匹配对象	准则权重向量
A_1	$\omega^{A_1} = (0.5, 0.1, 0.2, 0.2)^T$
A_3	$\omega^{A_3} = (0.1, 0.3, 0.3, 0.3)^T$
B_3	$\omega^{B_3} = (0.225, 0.1, 0.15, 0.425, 0.1)^T$
B_4	$\omega^{B_4} = (0.2, 0.183, 0.15, 0.367, 0.1)^T$

计算好准则权重向量后,利用式(8)~(10),构造模糊 n -cell数.通过计算得到加权平均后的评价矩阵,如表6和表7所示.

表6 企业对求职者的评估表格

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	(6.0,6.8,7.5)	(3.7,4.4,6.0)	(2.5,2.8,4.8)	(6.5,7.0,8.0)	(4.7,5.2,6.0)
A_2	(4.3,6.3,8.0)	(3.5,5.7,7.0)	(2.5,3.6,4.9)	(5.5,6.0,6.3)	(4.5,5.3,6.8)
A_3	(2.0,4.1,5.7)	(4.0,5.3,7.0)	(3.5,3.9,4.8)	(5.0,5.9,7.2)	(4.5,5.7,6.2)
A_4	(3.5,5.2,8.0)	(4.0,6.0,8.0)	(3.2,3.2,4.5)	(5.8,6.3,6.8)	(3.5,5.9,6.6)

表7 求职者对企业的评估表格

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	(3.8,4.5,4.8)	(1.8,2.3,3.1)	(3.9,6.1,7.3)	(2.2,2.8,5.5)	(1.5,2.9,4.3)
A_2	(5.5,5.6,6.5)	(5.8,6.2,7.5)	(4.6,6.2,7.4)	(5.5,6.0,6.3)	(5.3,6.9,7.8)
A_3	(1.5,3.0,4.3)	(3.0,3.9,4.5)	(5.4,6.5,7.1)	(4.0,4.6,5.5)	(2.0,3.6,5.0)
A_4	(3.0,5.4,7.0)	(2.0,4.0,5.5)	(5.0,6.2,7.4)	(5.0,5.5,6.0)	(3.5,6.0,7.0)

利用得分函数计算得分矩阵,如表8和表9所示.

表8 企业对求职者的模糊 n -cell数得分

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	6.8	4.7	3.4	7.2	5.3
A_2	6.2	5.4	3.7	5.9	5.5
A_3	3.9	5.4	4.0	6.0	5.5
A_4	5.6	6.0	3.6	6.3	5.3

表 9 求职者对企业的模糊 n -cell 数得分

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4.4	2.4	5.8	3.5	2.9
A_2	5.9	6.5	6.1	5.9	6.7
A_3	2.9	3.8	6.3	4.7	3.5
A_4	5.1	3.8	6.2	5.5	5.5

引入 Boolean 变量 x_{ij} , 结合稳定匹配条件, 建立双边优化模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z_1 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 s_{ij}^A x_{ij}, \\ \max Z_2 = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 s_{ij}^B x_{ij}, \\ s.t. \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, i \in I, \\ \sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq 1, j \in J, \\ \sum_{s_{ih}^A > s_{ij}^A} x_{ih} + \sum_{s_{kj}^B > s_{ij}^B} x_{kj} + x_{ij} \geq 1, i \in I, j \in J, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \end{array} \right. \quad (28)$$

引入参数 λ , 并且取 $\lambda = 0.5$, 将多目标优化模型 (式(28)) 转化为单目标优化模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^5 (0.5s_{ij}^A x_{ij} + 0.5s_{ij}^B x_{ij}), \\ s.t. \sum_{i=1}^4 x_{ij} = 1, i \in I, \\ \sum_{j=1}^5 x_{ij} \leq 1, j \in J, \\ \sum_{s_{ih}^A > s_{ij}^A} x_{ih} + \sum_{s_{kj}^B > s_{ij}^B} x_{kj} + x_{ij} \geq 1, i \in I, j \in J, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \end{array} \right. \quad (29)$$

利用 Lingo 软件对式 (29) 进行求解, 最终得到最优配对矩阵 \mathbf{X} :

$$\mathbf{X}: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

根据矩阵 \mathbf{X} 可以得到最优配对: $A_1 \sim B_2, A_2 \sim B_1, A_3 \sim B_5, A_4 \sim B_4$, 求职者 B_3 没有匹配项.

为充分说明本文所提方法的优越性和可行性, 从不同角度进行分析.

首先, 本研究在方法论层面较文献 [11, 13] 具有显著改进, 主要体现在以下两个方面: 1) 通过构造模糊 n -cell 数实现了多维评估, 克服了传统单一综合评价的局限性; 2) 在匹配模型中增加了稳定匹配约束条件, 使得本文模型成为文献 [11, 13] 中模型的推广形式. 在文献 [11, 13] 的模型下, 本文算例变为求解如下模型:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (0.5s_{ij}^A x_{ij} + 0.5s_{ij}^B x_{ij}), \\ s.t. \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in I, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1, j \in J, \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \end{array} \right. \quad (31)$$

求解后有如下配对矩阵:

$$\mathbf{X}_0: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

从矩阵 X_0 可以得到最优配对: $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_5, A_3 \sim B_3, A_4 \sim B_4$, 求职者 B_2 没有匹配项. 仔细观察发现, $T(A_3) = B_3$ 并且 $T(B_2) = B_2$, 但是 $s_{32}^A > s_{33}^A$, 即: 虽然 A_3 和 B_3 形成匹配对, 但是 A_3 对 B_2 的满意度大于对 B_3 的满意度, 由定义 2 可知, 得到的双边匹配结果是不稳定的.

其次, 在评估方法上, 本文和文献 [13] 存在差异. 虽然文献 [13] 采用三角直觉模糊数考虑主观偏好, 但缺乏实际评估意义, 且仅支持综合评分. 而本文所提基于模糊 n -cell 数的方法与实际充分结合, 为双方决策者提供了多方面的评估准则, 同时考虑决策者因文化背景和教育理念的不同对准则内涵的理解存在差异.

最后, 在评估信息处理方面, 本文与文献 [10] 存在本质区别. 具体而言, 文献 [10] 所采用的多粒度犹豫模糊语言转换方法存在缺陷: 语言术语到数值的转换必然伴随信息损失, 从而导致匹配误差. 为解决这一问题, 本文采用数值计算方法, 有效避免转换过程中的信息损失.

综上所述, 本文所提方法通过引入模糊 n -cell 数, 实现了: 1) 准则得分的精细化评估; 2) 权重分配的个性化设置; 3) 决策过程的适应性优化. 该方法不仅考虑了决策者教育理念的差异和社会文化因素的影响, 还为不同文化背景下的决策问题提供普适性的解决方案. 相比传统方法, 更能反映真实决策场景中的认知差异和动态需求.

4 结论

考虑决策过程中评估准则的多方面性, 本文基于模糊 n -cell 数提出一种解决双边匹配问题的新方法. 双方主体分别从多个准则对匹配对象进行评估, 并且给出不完全的准则权重信息. 以每个匹配对象满意度最大化为目标, 以一对一匹配条件和稳定匹配条件为约束, 建立多目标优化模型. 再利用线性加权将多目标优化模型转化为单目标优化模型, 求解该模型得到最优配对. 最后, 通过企业和求职者的实际案例验证本文所提方法的可行性.

本文所提方法从新的角度解决了双边匹配问题, 但没有考虑专家在评分时的犹豫度, 也没有考虑决策过程中多阶段性的特征. 未来的研究中, 将继续考虑引入犹豫度, 构造直觉模糊 n -cell 数解决双边匹配问题、基于模糊 n -cell 数解决多阶段的双边匹配问题等.

参考文献:

- [1] GALE D, SHAPLEY L S. College admissions and the stability of marriage[J]. The American Mathematical Monthly, 1962, 69(1): 9-15.
- [2] ROTH A E, ROTHBLUM U G, VANDE VATE J H. Stable matchings, optimal assignments, and linear programming[J]. Mathematics of Operations Research, 1993, 18(4): 803-828.
- [3] ROTH A E. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory[J]. Journal of Political Economy, 1984, 92(6): 991-1016.
- [4] 吴澎, 吴群, 周礼刚, 等. 基于多目标属性权重优化的犹豫模糊语言TOPSIS决策方法[J]. 运筹与管理, 2021, 30(6): 42-47. WU P, WU Q, ZHOU L G, et al. Hesitant fuzzy linguistic TOPSIS decision making method based on multi-objective attribute weight optimization[J]. Operations Research and Management Science, 2021, 30(6): 42-47. (in Chinese)
- [5] 乐琦, 樊治平. 基于不完全序值信息的双边匹配决策方法[J]. 管理科学学报, 2015, 18(2): 23-35. YUE Q, FAN Z P. Decision method for two-sided matching based on incomplete ordinal number information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2015, 18(2): 23-35. (in Chinese)
- [6] 樊治平, 乐琦. 基于完全偏好序信息的严格双边匹配方法[J]. 管理科学学报, 2014, 17(1): 21-34. FAN Z P, YUE Q. Strict two-sided matching method based on complete preference ordinal information[J]. Journal of Management Sciences in China, 2014, 17(1): 21-34. (in Chinese)
- [7] LI B D, YANG Y, SU J F, et al. Two-sided matching model for complex product manufacturing tasks based on dual hesitant fuzzy preference information[J]. Knowledge-Based Systems, 2019, 186: 104989.
- [8] ZHANG Z, KOU X Y, YU W Y. Two-sided matching decision making based on heterogeneous incomplete preference relations[C]//2017 12th International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE). November 24-26, 2017. Nanjing, China. IEEE, 2017: 1-6.
- [9] ZHANG Z, GUO C H, MARTINEZ L. Managing multigranular linguistic distribution assessments in large-scale multiattribute group decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2017, 47(11): 3063-3076.

- [10] ZHANG Z, GAO J L, GAO Y, et al. Two-sided matching decision making with multi-granular hesitant fuzzy linguistic term sets and incomplete criteria weight information[J]. *Expert Systems with Applications*, 2021, 168: 114311.
- [11] 李沃源, 乔剑敏. 基于区间直觉模糊集的双边匹配决策模型及应用[J]. *模糊系统与数学*, 2021, 35(3): 71-77.
LI W Y, QIAO J M. Two-sided matching decision-making method and application based on interval-valued intuitionistic fuzzy environment[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2021, 35(3): 71-77. (in Chinese)
- [12] 乔剑敏, 李沃源. 基于区间直觉模糊集的多阶段动态双边匹配决策方法[J]. *模糊系统与数学*, 2023, 37(2): 89-97.
QIAO J M, LI W Y. Research on multi-stage dynamic two-sided matching decision method based on interval intuitionistic fuzzy sets[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2023, 37(2): 89-97. (in Chinese)
- [13] 王磊, 李文杰, 王海. 基于累积前景理论的多粒度概率语言双边匹配决策方法[J]. *控制与决策*, 2025, 40(1): 300-307.
WANG L, LI W J, WANG H. Two-sided matching decision making method with multi-granular probabilistic linguistic set based on cumulative prospect theory[J]. *Control and Decision*, 2025, 40(1): 300-307. (in Chinese)
- [14] 彭娟娟, 谭灏, 隆清琦, 等. 基于改进TODIM与图片模糊偏好信息的多属性双边匹配决策方法[J]. *系统科学与数学*, 2024, 44(8): 2384-2411.
PENG J J, TAN H, LONG Q Q, et al. A multi-attribute two-sided matching decision-making method based on improved TODIM and picture fuzzy preference information[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2024, 44(8): 2384-2411. (in Chinese)
- [15] GALE D. The two-sided matching problem: Origin, development and current issues[J]. *International Game Theory Review*, 2001, 3(2/3): 237-252.
- [16] ECHENIQUE F. What matchings can be stable? The testable implications of matching theory[J]. *Mathematics of Operations Research*, 2008, 33(3): 757-768.
- [17] ZHANG Z, KOU X Y, PALOMARES I, et al. Stable two-sided matching decision making with incomplete fuzzy preference relations: A disappointment theory based approach[J]. *Applied Soft Computing*, 2019, 84: 105730.
- [18] WANG G X, SHI P, WEN C L. Fuzzy approximation relations on fuzzy n -cell number space and their applications in classification[J]. *Information Sciences*, 2011, 181(18): 3846-3860.
- [19] WANG Y M. Using the method of maximizing deviation to make decision for multiindices[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 1997, 8(3): 21-26.

责任编辑: 张自强