

# 基于 Cobb-Douglas 及递归效用函数的 养老金最优资产配置策略研究\*

刘伟, 丁逸康, 赵睿杰, 杜俐, 马玉梅

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

**摘要:** 研究考虑长寿趋势的目标收益型养老金的最优投资和收益调整问题. 采用改进的死亡力模型, 将养老金计划参与者的长寿趋势引入养老金的决策管理问题中. 以期望效用最大为优化准则, 建立随机控制模型, 其中效用函数分别采用 Cobb-Douglas 效用函数以及递归效用函数. 针对金融市场模型不确定的特点, 采用鲁棒方法求解最优控制策略. 运用动态规划方法, 通过求解相应 HJB (Hamilton-Jacobi-Bellman) 方程, 得到值函数和控制策略的显式表达式. 最后通过数值分析, 给出两类效用下重要参数对最优控制策略的影响.

**关键词:** 目标收益养老金; Cobb-Douglas 效用函数; 鲁棒控制; 长寿趋势

**DOI:** 10.13568/j.cnki.651094.651316.2024.01.09.0002

**中图分类号:** O224; F840.67 **文献标识码:** A **文章编号:** 2096-7675(2025)01-0024-012

**引文格式:** 刘伟, 丁逸康, 赵睿杰, 杜俐, 马玉梅. 基于 Cobb-Douglas 及递归效用函数的养老金最优资产配置策略研究[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文), 2025, 42(1): 24-35+47.

**英文引文格式:** LIU Wei, DING Yikang, ZHAO Ruijie, DU Li, MA Yumei. Research on optimal asset allocation strategy of pension based on Cobb-Douglas and Epstein-Zin recursive utility function[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English), 2025, 42(1): 24-35+47.

## Research on Optimal Asset Allocation Strategy of Pension Based on Cobb-Douglas and Epstein-Zin Recursive Utility Function

LIU Wei, DING Yikang, ZHAO Ruijie, DU Li, MA Yumei

(School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China)

**Abstract:** This paper investigates the optimal investment and benefit adjustment for target benefit pension plan considering the longevity trend. By using the Cobb-Douglas utility function and maximizing expected utility as the optimization criterion, we aim to find robust control strategies that account for the uncertainty in the financial market models. Based on stochastic control theory, the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation is solved to obtain explicit solutions for the value function and control strategies. Finally, numerical analysis is conducted to study the impact of influencing factors on the strategies.

**Key words:** target benefit plan pension; Cobb-Douglas utility function; robust control; longevity trend

### 0 引言

自 21 世纪以来, 人口老龄化问题已成为全球面临的重要挑战之一. 根据国家统计局 2023 年 1 月发布的数据, 中国的老龄化问题日益加剧. 截至 2022 年末, 60 岁及以上的老年人口比例达到 19.8%, 同比增长 0.9 个百分点, 65 岁及以上的老年人口占比为 14.9%, 同比增长 0.7 个百分点<sup>[1-2]</sup>. 根据国际划分标准, 当 60 岁及以上老年人口达到 10% 或者 65 岁及以上老年人口达到 7% 时, 认为该国家或地区进入老龄化社会. 当 65 岁及以上老

\* 收稿日期: 2024-01-09

基金项目: 国家自然科学基金“金融保险中的多维风险度量与最优控制问题研究”(11961064); 新疆维吾尔自治区大学生创新项目“基于 Cobb-Douglas 效用函数的养老金最优资产配置策略研究”(S202210755095).

作者简介: 刘伟 (1978—), 女, 博士, 教授, 主要从事随机最优控制、保险精算的研究, E-mail: liuwei.math@xju.edu.cn.

年人口超过 14% 时,说明其步入中度老龄化社会.由以上数据可以看出,中国的人口老龄化速度正在迅速加快.人口老龄化的加剧对国家财政和养老金机构带来了严重的支付压力.另一方面,我国的养老金市场化运营程度较低.截至 2021 年末,全年基本养老保险基金收入为 65 793 亿元,基金支出为 60 197 亿元,年末基本养老保险基金累计结存 63 970 亿元,而基金投资运营规模为 1.46 万亿元,不足全部结存的四分之一<sup>[3]</sup>.因此,如何实现养老基金高效运营,是应对我国人口老龄化现状,实现养老保险制度可持续发展的一项重要课题.

早期的养老金计划分为两大类:固定收益计划 (Defined Benefit, DB) 和固定缴费计划 (Defined Contribution, DC).在 DB 型计划中,风险由计划发起人承担,参与者退休收入由其工资和工作年限决定,缺乏灵活性.在 DC 型计划中,参与者可以自由选择投资方案,投资风险由计划参与者承担,参与者的退休收益受市场波动较大.随着老龄化程度的加深,养老金领域面临着越来越大的挑战和压力,传统的养老金计划在风险分担和退休收入等方面存在一定的局限性.因此,一种新型的养老金计划——目标收益型计划 (Target Benefit Plan, TBP) 逐渐成为学者和业界关注的焦点.与传统的 DB 型计划和 DC 型计划不同, TBP 具有一定程度上的代际风险转移特征.在 TBP 中,发起人和参与者之间的责任和风险分担被重新定义,可以更好平衡养老金计划的财务稳健性,提高养老金计划的可持续性.针对目标收益养老金的投资和收益调整问题,许多学者建立了不同的随机优化模型并对其最优控制策略展开了研究<sup>[4-7]</sup>.在这些有关 TBP 的研究中,采用的效用函数均为一元效用函数,其优化目标仅集中在最大化退休人员的收益.实际上,养老基金的财富水平对于基金的长期可持续发展至关重要.只有综合考虑退休人员收益和养老基金财富两方面因素,才能确保基金的长期可持续发展.为此,文献 [8] 首次将一类二元效用函数——Cobb-Douglas 效用函数引入养老金模型的最优控制问题中,通过调整退休人员收益和基金财富的权重,以实现退休人员收益和基金财富两方面的均衡持续增长.此外,文献 [8] 还对 Epstein-Zin 递归效用函数下养老金资产配置策略进行了研究.本文在文献 [8] 的基础上,对模型作了进一步丰富和推广.

随着社会和经济的不断发展和医疗技术的不断进步,人类的平均寿命得以显著延长.这是一个积极的趋势,但同时使得长寿风险更加突出.根据承担长寿风险的主体不同,长寿风险可以分为个体长寿风险和聚合长寿风险.个体长寿风险可以通过购买养老保险进行转移.聚合长寿风险是系统性的,无法分散的<sup>[9-10]</sup>.因此,对长寿风险的建模及管理对养老金计划的决策制定至关重要.文献 [11] 假设最大年龄随时间线性增长,用于描述预期寿命的增长.文献 [12] 对死亡力模型进行改进,将死亡力表示为一个既与年龄有关,又随时间变化的量,以度量不同人群的长寿趋势.本文基于文献 [12] 的死亡力模型,研究长寿趋势对目标收益养老基金控制策略的影响,以更准确地评估养老金的可持续性,为基金管理者制定决策提供依据.

金融决策过程中,由于市场环境的不稳定,数据的不完整和不准确以及经济和金融行为的复杂性等因素,决策者往往无法准确识别真实的概率测度.这种由于决策者缺乏关于影响决策外部事件的概率信息而导致的不确定性称为模型不确定性,也常被称为模糊性.文献 [13] 最早将模糊性引入 Lucas 资产定价模型,提出了可替代测度的数学模型.文献 [14] 提出了一种在连续时间框架下处理模型不确定的鲁棒控制方法,通过构造相对熵来解决模糊厌恶问题.此后,鲁棒控制方法被广泛应用于金融保险领域.文献 [15] 针对保险公司的模糊厌恶,基于 Heston 随机波动模型,采用鲁棒控制方法给出了最优再保险和投资策略.文献 [16] 综合考虑随机利率、随机工资、通货膨胀等多种风险因素,给出 DC 型养老金的鲁棒最优投资策略.文献 [17] 假设养老金管理者对参数不确定带来的风险是模糊厌恶的,在指数效用下得到 TBP 计划的鲁棒最优投资策略的解析解.基于文献 [14] 的鲁棒控制方法,本文针对 Cobb-Douglas 效用及递归效用下 TBP 计划的最优投资和收益调整策略进行了分析并求解.

本文研究了一类目标收益型养老金计划的最优投资和福利调整问题.通过考虑带有时间参数的死亡力模型,将养老金计划参与者的长寿趋势引入养老金的决策管理问题中.选择 Cobb-Douglas 效用函数来描述其对最优投资和福利支出的偏好,同时达到兼顾双方利益的目的.进一步将 Cobb-Douglas 效用函数扩展到递归效用函数,以期望效用最大为优化准则.针对金融市场模型不确定的特点,采用鲁棒方法求解最优控制策略.本文应用动态规划方法,建立相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程并求解得出最优投资和收益策略的解析解.最后通过数值分析,讨论两类效用下各影响因素对控制策略的影响.

本文的创新点为: (i) 将长寿风险考虑进目标收益型养老金计划,进一步完善养老金体系的长寿风险研究; (ii) 基于 Cobb-Douglas 效用和递归效用,给出鲁棒最优策略的显式解.

## 1 构建模型

令  $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$  是一个满足通常条件的概率空间, 其中:  $P$  是  $\Omega$  上的一个概率测度,  $F := \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  是一个完备的, 右连续的滤波,  $\mathcal{F}_t$  表示到  $t$  时刻获得的所有信息.  $W(t)$ ,  $t \geq 0$  是定义在概率空间上的一维标准布朗运动. 假设以下定义的所有随机过程在概率空间  $(\Omega, F, P)$  上都是定义良好的, 并且都是  $F = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0, T]}$  适应的.

### 1.1 金融市场

假设养老基金可以投资于一种无风险资产和一只股票. 无风险资产的价格过程为

$$\begin{cases} dS_0(t) = rS_0(t)dt, \\ S_0(0) = 1, \end{cases}$$

其中:  $r$  为无风险利率.

股票的价格过程为

$$\begin{cases} dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dW(t)], \\ S(0) = s_0, \end{cases}$$

其中:  $\mu > r$  为预期回报率,  $\sigma > 0$  为市场波动率.

### 1.2 目标收益型养老金计划成员资格

假设计划成员在  $x_0$  岁进入劳动力市场, 并持续在劳动力市场工作到  $x_r$  岁退休. 由于生育率的下降和人类预期寿命的增加, 死亡率将随着时间  $t$  的推移而减小, 随着年龄  $x$  的增加而增大. 因此, 本文引入一个与年龄和时间相关的死亡力函数  $\mu(x, t)$ , 表达式为

$$\mu(x, t) = \mathcal{A} + \mathcal{B}\theta^{x-\lambda t}, \quad \mathcal{B} > 0, \mathcal{A} \geq -\mathcal{B}, \theta > 1,$$

其中:  $\lambda$  为长寿参数, 表示死亡力随着时间减小的趋势. 因此, 生存函数为

$$\begin{aligned} s(x, t) &= \exp \left\{ - \int_0^{x-x_0} \mu(x_0 + u, t - (x - x_0) + u) du \right\} \\ &= \exp \left\{ -\mathcal{A}(x - x_0) - \frac{\mathcal{B}}{(1-\lambda)\ln\theta} [\theta^{x-\lambda t} - \theta^{(1-\lambda)x_0 + \lambda(x-t)}] \right\}. \end{aligned}$$

假设  $t$  时刻人群的最大年龄为  $m(t)$ ,

$$m(t) = m(0) + \xi t,$$

其中:  $\xi$  为增长率,  $t \geq 0$ ,  $m(t) \geq x \geq x_0$ .

设  $n(t)$  表示  $t$  时刻年龄为  $x_0$  的人进入养老金计划的人群密度,  $n(t) = n_0 e^{k_0 t}$ , 其中:  $n_0$  为 0 时刻  $x_0$  岁的人进入养老金计划的人群密度,  $k_0$  为增长率. 从而在  $t$  时刻, 年龄为  $x$  岁的人群密度为

$$n(t - (x - x_0))s(x, t), \quad x > x_0 \quad (1)$$

在  $t$  时刻缴费人数  $N(t)$  和退休人数  $R(t)$  分别表示为

$$\begin{aligned} N(t) &= \int_{x_0}^{x_r} n(t - (x - x_0))s(x, t)dx, \\ R(t) &= \int_{x_r}^{m(t)} n(t - (x - x_0))s(x, t)dx, \end{aligned}$$

其中:  $x_r$  表示退休年龄.

设  $L(t)$  为  $x_r$  岁退休的人在  $t$  时刻的平均工资, 表示为

$$L(t) = L(0)e^{\alpha t}, \quad t \geq 0 \quad (2)$$

其中:  $\alpha$  表示工资增长率.  $\tilde{L}(x, t)$  为  $t$  时刻  $x_r$  岁退休人员的年薪率, 表示为

$$\tilde{L}(x, t) = L(t)e^{-\alpha(x-x_r)},$$

其中:  $t \geq 0$ ,  $x \geq x_r$ .

设养老金在  $t$  时刻给  $x$  岁的退休人员的福利支出为

$$\tilde{B}(x, t) = \tilde{f}(t)\tilde{L}(x, t)e^{\kappa(x-x_r)} = \tilde{f}(t)L(t)e^{-(\alpha-\kappa)(x-x_r)}, \quad x \geq x_r,$$

其中:  $e^{\kappa(x-x_r)}$  用于衡量退休后生活成本调整,  $\kappa$  是生活成本增长率,  $\tilde{f}(t)$  为替代率. 养老金在  $t$  时刻派发的总福利支出  $\tilde{B}(t)$  为

$$\tilde{B}(t) = \int_{x_r}^{m(t)} n(t-(x-x_0))s(x, t)\tilde{B}(x, t)dx = I(t)\tilde{f}(t)L(t),$$

其中

$$I(t) = \int_{x_r}^{m(t)} n(t-x+x_0)s(x, t)e^{-(\alpha-\kappa)(x-x_r)}dx.$$

设  $B(t)$  为  $t$  时刻养老金的福利支出相对财富的比例, 则  $\tilde{B}(t) = X(t)B(t)$ .

设养老金计划参与者  $t$  时刻的总缴费为

$$\tilde{C}(t) = \int_{x_0}^{x_r} n(t-x+x_0)s(x, t)c_0e^{\alpha t}dx = c_0e^{\alpha t}N(t),$$

其中:  $c_0$  为初始时刻缴费. 设  $C(t)$  为  $t$  时刻的缴费率, 则  $\tilde{C}(t) = X(t)C(t)$ .

令  $\pi(t)$  表示  $t$  时刻投资于风险资产的比例,  $X(t)$  为  $t$  时刻养老金的财富. 财富过程可以表示为

$$\begin{cases} dX^\pi(t) = X^\pi(t)[r + \pi(t)(\mu - r) + C(t) - B(t)]dt + X^\pi(t)\pi(t)\sigma dW(t), \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

## 2 考虑鲁棒性的 TBP 养老金的最优投资问题

### 2.1 TBP 计划的鲁棒最优控制问题

假设养老金参与者都是模糊厌恶的. 考虑一族与测度  $P$  等价的测度

$$\mathcal{Q} = \{Q | Q \sim P\}.$$

根据 Girsanov 定理, 对任意的  $Q \in \mathcal{Q}$ , 存在  $\{\varphi(t), t \in [0, T]\}$ , 使得

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \Lambda(t),$$

其中

$$\Lambda(t) = \exp \left\{ \int_0^t \varphi(s)dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t (\varphi(s))^2 ds \right\}.$$

由于  $\varphi := (\varphi(t))_{t \in [0, T]}$  满足 Novikov 条件, 则  $\Lambda(t)$  是一个  $P$  鞅. 根据 Girsanov 定理, 在等价测度  $Q$  下, 随机过程为一维标准布朗运动.

$$dW^Q(t) = dW(t) - \varphi(t)dt \quad (3)$$

此时在等价测度  $Q$  下, 股票过程为

$$\begin{cases} dS_1(t) = S_1(t)[(\mu + \sigma\varphi(t))dt + \sigma dW^Q(t)], \\ S_1(0) = s_1. \end{cases}$$

相应的财富过程为

$$\begin{cases} dX^\pi(t) = X^\pi(t)[r + \pi(t)(\mu - r + \sigma\varphi(t)) + C(t) - B(t)]dt + X^\pi(t)\pi(t)\sigma dW^Q(t), \\ X(0) = x_0. \end{cases}$$

定义值函数为

$$J(t, x, \pi, B) = E \left[ \int_t^T e^{-\delta s} u(B(s)X(s), X(s)) ds + e^{-\delta T} U(X(T)) | X(t) = x, S_1(t) = s \right] \quad (4)$$

由  $\Pi$  表示所有可接受策略的集合. 由于存在模型不确定, 考虑在最坏等价测度下求解最优控制策略, 因此, 相应的值函数可以表示为

$$\inf_{(\pi, B) \in \Pi} \sup_{\varphi \in \Phi} E^Q \left[ J(t, x, \pi, B) + \int_0^T \frac{(\varphi(s))^2}{2\Psi(s, X(s))} ds | X(t) = x, S_1(t) = s \right] \quad (5)$$

其中:  $\Psi$  表示模糊厌恶程度.

为解决鲁棒最优控制问题, 定义价值函数为

$$\begin{cases} V(t, x, \pi, B) = \inf_{(\pi, B) \in \Pi} \sup_{\varphi \in \Phi} E^Q \left[ J(t, x, \pi, B) + \int_0^T \frac{(\varphi(s))^2}{2\Psi(s, X(s))} ds | X(t) = x, S_1(t) = s \right] \\ \Psi(t, x, \pi, B) = \frac{\beta}{rV(t, x, \pi, B)} \end{cases} \quad (6)$$

## 2.2 模型的求解

定义变分算子

$$\aleph^{\pi, \varphi} \psi(t, x, \pi, B) = \psi_t + x[r + C(t) - B(t) + \pi(\mu + \sigma\varphi(t) - r)]\psi_x + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\psi_{xx} \quad (7)$$

其中:  $\psi_t, \psi_x, \psi_{xx}$  分别是  $\psi(t, x, \pi, B)$  关于变量  $t, x$  的一阶和二阶偏导.

根据动态规划原理得到 HJB 方程

$$\inf_{(\pi, B) \in \Pi} \sup_{\varphi \in \Phi} \left\{ \aleph^{\pi, \varphi} V(t, x, \pi, B) + u(Bx, x) + \frac{\varphi^2}{2\Psi_s} \right\} = 0 \quad (8)$$

### 2.2.1 Cobb-Douglas 效用下最优投资和福利调整策略

采用如下 Cobb-Douglas 效用函数度量财富与福利支出的效用

$$u(x, y) = \frac{(x^\eta y^{1-\eta})^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

终端财富效用为

$$U(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

其中:  $\gamma > 1$  是养老金发起人的风险规避系数, 常数  $\eta \in (0, 1]$  可以解释为反映养老金发起人对福利水平和当前财富的权重参数.

**定理 1** 令  $H(t, x)$  是一个在  $[0, T] \times \mathbf{R}$  上二次连续可微的函数, 并且满足边界条件  $H(T, x) = U(x)$ , 则有值函数

$$V(t, x) = e^{-\delta t} H(t, x).$$

如果  $(\pi^*, B^*)$  能够使方程 (8) 达到最大, 则  $(\pi^*, B^*)$  是鲁棒最优控制问题 (6) 的最优策略.

**定理 2** 鲁棒最优控制问题 (6) 的最优资产配置和福利调整策略分别为

$$\begin{aligned} \pi^* &= \frac{(\mu - r)r}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r}, \\ B^* &= \frac{A(t)\eta^\psi}{A(T) + \eta^{\psi-1}\psi \int_t^T A(s) ds}. \end{aligned}$$

最坏情况测度的失真过程

$$\varphi^* = -\frac{xH_x\pi\sigma\beta}{rH}.$$

相应的最优价值函数为

$$V(t, x) = \sup_{(\pi, B) \in \Pi} J(t, x, \pi, B) = J(t, x, \pi^*, B^*).$$

证明 很容易得出 HJB 方程形式

$$\inf_{(\pi, B) \in \Pi} \sup_{\varphi \in \Phi} \left\{ H_t - \delta H + [r + C - B + \pi(\mu + \sigma\varphi - r)]xH_x + \frac{1}{2}x^2\pi^2\sigma^2H_{xx} + u(Bx, x) + \frac{rH\varphi^2}{2\beta} \right\} = 0 \quad (9)$$

对  $\varphi$  求导

$$xH_x\pi\sigma + \frac{rH\varphi}{\beta} = 0,$$

得

$$\varphi^* = -\frac{xH_x\pi\sigma\beta}{rH},$$

代回有

$$H_t - \delta H + [r + C - B + \pi(\mu - r)]xH_x - \frac{\pi^2x^2\sigma^2H_x^2\beta}{2rH} + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2x^2H_{xx} + u(Bx, x) = 0.$$

猜解

$$H(t, x) = f(t)\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad f(T) = 1,$$

则

$$H_t = \frac{f_t}{1-\gamma}x^{1-\gamma}, \quad H_x = f(t)x^{-\gamma}, \quad H_{xx} = -\gamma f(t)x^{-\gamma-1}.$$

代入上式, 有

$$\begin{aligned} & \frac{f_t}{1-\gamma}x^{1-\gamma} - \delta\frac{f(t)}{1-\gamma}x^{1-\gamma} + f(t)[r + C - B + \pi(\mu - r)]x^{1-\gamma} \\ & - \frac{\pi^2\sigma^2\beta f(t)(1-\gamma)}{2r}x^{1-\gamma} - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\gamma f(t)x^{1-\gamma} + \frac{B^{\eta(1-\gamma)}}{1-\gamma}x^{1-\gamma} = 0, \end{aligned}$$

同除  $x^{1-\gamma}$  得

$$\frac{f_t}{1-\gamma} - \delta\frac{f(t)}{1-\gamma} + f(t)[r + C - B + \pi(\mu - r)] - \frac{\pi^2\sigma^2\beta f(t)(1-\gamma)}{2r} - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\gamma f(t) + \frac{B^{\eta(1-\gamma)}}{1-\gamma} = 0,$$

对  $\pi, B$  分别求导推出

$$\pi^* = \frac{(\mu - r)r}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r},$$

$$B^* = \frac{f(t)^{\frac{1}{\eta(1-\gamma)-1}}}{\eta^{\frac{1}{\eta(1-\gamma)-1}}}.$$

代入上式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{f_t}{1-\gamma} - \delta\frac{f(t)}{1-\gamma} + f(t) \left[ r + C - \frac{f(t)^{\frac{1}{\eta(1-\gamma)-1}}}{\eta^{\frac{1}{\eta(1-\gamma)-1}}} + \frac{(\mu - r)^2 r}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r} \right. \\ & \left. - \frac{r(\mu - r)^2\sigma^2\beta(1-\gamma)}{2(\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r)^2} - \frac{\sigma^2 r^2(\mu - r)^2\gamma}{2(\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r)^2} \right] + \frac{1}{1-\gamma} \frac{f(t)^{\frac{\eta(1-\gamma)}{\eta(1-\gamma)-1}}}{\eta^{\frac{\eta(1-\gamma)}{\eta(1-\gamma)-1}}} = 0, \end{aligned}$$

同乘  $(1-\gamma)f(t)^{\frac{\eta(1-\gamma)}{1-\eta(1-\gamma)}}$  得

$$\begin{aligned} & f_t f(t)^{\frac{\eta(1-\gamma)}{1-\eta(1-\gamma)}} + f(t)^{\frac{1}{1-\eta(1-\gamma)}} \left[ r(1-\gamma) + C(1-\gamma) - \delta + \frac{r(1-\gamma)(\mu - r)^2}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r} \right. \\ & \left. - \frac{\sigma^2(\mu - r)^2\beta r(1-\gamma)^2 + \sigma^2 r^2(\mu - r)^2\gamma(1-\gamma)}{2(\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r)^2} \right] - [1 - \eta(1-\gamma)]\eta^{\frac{\eta(1-\gamma)}{1-\eta(1-\gamma)}} = 0. \end{aligned}$$

令

$$h(t) = f(t)^{\frac{1}{1-\eta(1-\gamma)}}, h_t = \frac{1}{1-\eta(1-\gamma)} f_t f(t)^{\frac{\eta(1-\gamma)}{1-\eta(1-\gamma)}},$$

$$a = r(1-\gamma) - \delta + \frac{r(1-\gamma)(\mu-r)^2}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r} - \frac{\sigma^2(\mu-r)^2\beta r(1-\gamma)^2 + \sigma^2 r^2(\mu-r)^2\gamma(1-\gamma)}{2(\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r)^2},$$

则

$$\begin{cases} h_t + \frac{a+(1-\gamma)C}{1-\eta(1-\gamma)} h(t) + \eta \frac{\eta(1-\gamma)}{1-\eta(1-\gamma)} = 0, \\ h(T) = 1. \end{cases}$$

$$h(t) = e^{\frac{a(T-t)}{1-\eta(1-\gamma)} + \frac{1-\gamma}{1-\eta(1-\gamma)} \int_t^T C(s)ds} + e^{\frac{\gamma-1}{1-\eta(1-\gamma)} \int_0^t C(s)ds - \frac{at}{1-\eta(1-\gamma)}} \eta \frac{\eta(1-\gamma)}{1-\eta(1-\gamma)} \int_t^T e^{\frac{as}{1-\eta(1-\gamma)} + \frac{1-\gamma}{1-\eta(1-\gamma)} \int_0^s C(w)dw} ds.$$

令

$$\hat{\psi} = \frac{1}{1-\eta(1-\gamma)},$$

$$A(t) = \exp\left(\hat{\psi}at + \hat{\psi}(1-\gamma) \int_0^t C(s)ds\right).$$

则

$$A(T) = \exp\left(\hat{\psi}aT + \hat{\psi}(1-\gamma) \int_0^T C(s)ds\right),$$

可以推出

$$h(t) = (A(t) + \eta^{\hat{\psi}-1} \int_t^T A(s)ds) / A(t) \quad (10)$$

则

$$f(t) = [(A(T) + \eta^{\hat{\psi}-1} \int_t^T A(s)ds) / A(t)]^{\frac{1}{\hat{\psi}}} \quad (11)$$

最优资产配置策略和最优给付额的具体表达式为

$$\pi^* = \frac{(\mu-r)r}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r},$$

$$B^* = \frac{f(t)^{-\hat{\psi}}}{\eta^{-\hat{\psi}}} = \frac{A(t)\eta^{\hat{\psi}}}{A(T) + \eta^{\hat{\psi}-1} \int_t^T A(s)ds}.$$

可知, 最优资产配置  $\pi^*$  与  $t$  时刻的工资过程无关, 为一固定常数, 而最优资产调整因子  $\tilde{f}^*$  可由最优收益给付额  $B^*$  来表示

$$\tilde{f}^* = \frac{B^* X(t)}{L(t)I(t)} \quad (12)$$

### 2.2.2 递归效用最优投资和福利调整策略

假设 TBP 养老金的管理者有递归偏好, 给出连续时间下的递归效用

$$u_1(c, v) = \delta\theta v(c^{1-\phi}((1-\gamma)v)^{-\frac{1}{\theta}} - 1),$$

其中:  $\theta = (1-\gamma)/(1-\phi)$ ,  $1/\phi$  反映了未来消费对当前消费的替代程度.

**定理 3** 在递归效用下最优资产配置和退休收益调整策略分别为

$$\pi^* = \frac{(\mu-r)r}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r},$$

$$B^* = \frac{(\delta\eta)D(t)}{D(T) + \delta \int_t^T D(s)ds}.$$

最坏情况测度的失真过程

$$\varphi^* = -\frac{xV_x\pi\sigma\beta}{rV}.$$

相应的最优价值函数为

$$V(t, x) = \sup_{(\pi, B) \in \Pi} J(t, x, \pi, B) = J(t, x, \pi^*, B^*).$$

证明 得到 HJB 方程

$$\inf_{(\pi, B) \in \Pi} \sup_{\varphi \in \Phi} \left\{ \mathbb{N}^{\pi, \varphi} V^{\pi, B}(t) + u_1(C^{\pi, B}(s), V^{\pi, B}(s)) ds + \frac{\varphi^2}{2\Psi_s} \right\} = 0,$$

$$C^{\pi, B}(t) = (B(t)X(t))^\eta (X(t))^{1-\eta}.$$

$$\inf_{(\pi, B) \in \Pi} \sup_{\varphi \in \Phi} \left\{ V_t + [r + C - B + \pi(\mu - r + \sigma\varphi)]xV_x + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2V_{xx}x^2 + u_1(B^\eta x, V) + \frac{\varphi^2 Vr}{2\beta} \right\} = 0.$$

对  $\varphi$  求导

$$xV_x\pi\sigma + \frac{rV\varphi}{\beta} = 0,$$

得到

$$\varphi^* = -\frac{xV_x\pi\sigma\beta}{rV}.$$

代回有

$$V_t + [r + C - B + \pi(\mu - r)]xV_x - \frac{x^2\pi^2\sigma^2V_x^2\beta}{2rV} + \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2x^2V_{xx} + u_1(B^\eta x, V) = 0.$$

猜解

$$V(t, x) = \hat{g}(t) \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

有

$$V_t = \frac{\hat{g}_t}{1-\gamma} x^{1-\gamma}, \quad V_x = \hat{g}(t) x^{-\gamma}, \quad V_{xx} = -\gamma \hat{g}(t) x^{-\gamma-1}.$$

代入上式有

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{g}_t}{1-\gamma} x^{1-\gamma} + \hat{g}(t) x^{1-\gamma} [r + C - B + \pi(\mu - r)] \\ & - \frac{\pi^2\sigma^2\hat{g}(t)(1-\gamma)\beta}{2r} x^{1-\gamma} - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\gamma\hat{g}(t)x^{1-\gamma} + \frac{\delta\theta\hat{g}(t)^{1-\frac{1}{\theta}}B^{\eta(1-\phi)}}{1-\gamma} x^{1-\gamma} - \frac{\delta\theta\hat{g}(t)}{1-\gamma} x^{1-\gamma} = 0. \end{aligned}$$

两边同除  $x^{1-\gamma}$  得

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{g}_t}{1-\gamma} + \hat{g}(t) [r + C - B + \pi(\mu - r)] \\ & - \frac{\pi^2\sigma^2\hat{g}(t)(1-\gamma)\beta}{2r} - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2\gamma\hat{g}(t) + \frac{\delta\theta\hat{g}(t)^{1-\frac{1}{\theta}}B^{\eta(1-\phi)}}{1-\gamma} - \frac{\delta\theta\hat{g}(t)}{1-\gamma} = 0. \end{aligned}$$

其中:  $\theta = (1-\gamma)/(1-\phi)$ ,  $k = 1/(1-\eta(1-\phi))$ .

对  $\pi, B$  求偏导可以推出

$$\pi^* = \frac{(\mu - r)r}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r},$$

$$B^* = (\delta\eta)^k \hat{g}(t)^{-\frac{k}{\theta}}.$$

代入上式, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{g}_t}{1-\gamma} + \hat{g}(t) \left[ r + C - \frac{\delta\theta}{1-\gamma} - (\delta\eta)^k \hat{g}(t)^{-\frac{k}{\theta}} + \frac{(\mu - r)^2 r}{\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r} - \frac{\sigma^2 r \beta (1-\gamma) (\mu - r)^2 + \sigma^2 \gamma (\mu - r)^2 r^2}{2(\sigma^2\beta(1-\gamma) + \sigma^2\gamma r)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\delta^k \eta^{k-1} \theta \hat{g}(t)^{-\frac{k}{\theta}}}{1-\gamma} \right] = 0. \end{aligned}$$

同乘以  $(1-\gamma)\hat{g}(t)^{\frac{k}{\theta}-1}$  有

$$\hat{g}_t \hat{g}(t)^{\frac{k}{\theta}-1} + \hat{g}(t)^{\frac{k}{\theta}} \left[ r(1-\gamma) + C(1-\gamma) - \delta\theta + \frac{(\mu-r)^2 r(1-\gamma)}{\sigma^2 \beta(1-\gamma) + \sigma^2 \gamma r} - \frac{\sigma^2 r \beta(1-\gamma)^2 (\mu-r)^2 + \sigma^2 \gamma (\mu-r)^2 r^2 (1-\gamma)}{2(\sigma^2 \beta(1-\gamma) + \sigma^2 \gamma r)^2} \right] + \frac{1-\gamma}{k-1} (\delta\eta)^k = 0 \quad (13)$$

令

$$\hat{h}(t) = \hat{g}(t)^{\frac{k}{\theta}}, \quad \hat{h}_t = \frac{k}{\theta} \hat{g}(t)^{\frac{k}{\theta}-1} \hat{g}_t.$$

其中

$$r(1-\gamma) - \delta\theta + \frac{(\mu-r)^2 r(1-\gamma)}{\sigma^2 \beta(1-\gamma) + \sigma^2 \gamma r} - \frac{\sigma^2 \beta(1-\gamma)^2 (\mu-r)^2 r + (1-\gamma)\sigma^2 \gamma (\mu-r)^2 r^2}{2(\sigma^2 \beta(1-\gamma) + \sigma^2 \gamma r)^2} = a + \delta(1-\theta),$$

$$b = \frac{1-\gamma}{k-1} (\delta\eta)^k,$$

则上式变为

$$\begin{cases} \frac{\theta}{k} \hat{h}_t + [a + \delta(1-\theta) + (1-\gamma)C] \hat{h}(t) + b = 0, \\ \hat{h}(T) = (\delta\eta)^{k-1}. \end{cases}$$

解得

$$\hat{h}(t) = e^{-\frac{k}{\theta}[a+\delta(1-\theta)]t+k(\phi-1)\int_0^t C(s)ds} [(\delta\eta)^{k-1} e^{\frac{k}{\theta}[a+\delta(1-\theta)]T+k(1-\phi)\int_0^T C(s)ds} + \delta^k \eta^{k-1} \int_0^T e^{\frac{k}{\theta}[a+\delta(1-\theta)]s+k(1-\phi)\int_0^s C(s)du} ds].$$

令

$$D(t) = \exp \left\{ \frac{k}{\theta} [a + \delta(1-\theta)]t + k(1-\phi) \int_0^t C(s)ds \right\},$$

$$\hat{h}(t) = (\delta\eta)^{k-1} \left( D(T) + \delta \int_t^T D(s)ds \right) / D(t),$$

$$\hat{g}(t) = \left[ (\delta\eta)^{k-1} \left( D(T) + \delta \int_t^T D(s)ds \right) / D(t) \right]^{\frac{\theta}{k}},$$

$$B^* = (\eta\delta)^k g(t)^{-\frac{k}{\theta}} = \frac{(\delta\eta)D(t)}{D(T) + \delta \int_t^T D(s)ds}.$$

### 3 数值分析

本节通过数值分析讨论最优策略对部分参数值变化的敏感性. 根据文献 [12] 的设定, 模型参数选取如下:  $T = 50$ ,  $c_0 = 0.02$ ,  $\delta = 0.03$ ,  $\gamma = 3$ ,  $r = 0.01$ ,  $\mu = 0.06$ ,  $\sigma = 0.16$ ,  $\beta = 1.1$ ,  $\alpha = 0.02$ ,  $x_0 = 25$ ,  $x_r = 65$ ,  $n_0 = 0.1$ ,  $k_0 = -0.005$ ,  $\mathcal{A} = 0.000\ 022$ ,  $\mathcal{B} = 2.7 \times 10^{-6}$ ,  $\theta = 1.124$ ,  $\lambda = 0.25$ .

#### 3.1 Cobb-Douglas 效用

图 1 显示了 Cobb-Douglas 效用下权重参数  $\eta$  对最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  的影响. 由图 1 可以看出, 当  $\eta$  增加时, 最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  均随之降低. 根据目标函数, 参数  $\eta$  度量养老金发起人对福利支付政策的重视程度.  $\eta$  值较大时, 意味着他们更倾向于通过降低最优财富来提高福利支付, 以确保参与者能够获得更多的福利. 然而, 这也意味着较少的资金被用于其它方面, 如基金财富的增长或风险管理. 因此, 基金财富可能无法得到充分的增长, 导致支付水平的下降. 另外, 福利支付的权重越高, 也意味着养老金发起人对风险的容忍程度较低, 他们更倾向于保守的投资策略, 减少风险暴露, 但可能牺牲了一定的回报率. 这导致基金财富的增长受限, 进而影响支付水平的提高.

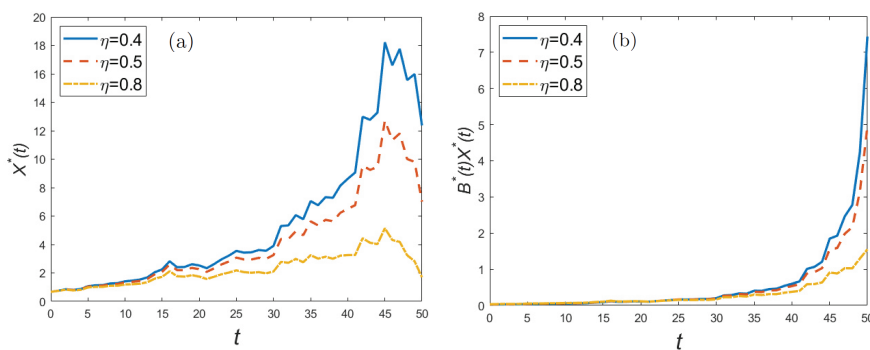


图 1 Cobb-Douglas 效用下权重参数  $\eta$  对  $X^*(t)$  (a) 和  $B^*(t)X^*(t)$  (b) 的影响

图 2 显示了风险规避系数  $\gamma$  对最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  的影响. 由图 2 可以看出, 当  $\gamma$  增加时, 最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  均随之降低. 风险规避系数  $\gamma$  是一种衡量风险厌恶程度的指标, 它会直接影响养老金发起者在权衡风险和回报时所做的决策. 较高的  $\gamma$  值表示养老金发起者更加厌恶风险, 倾向于采取保守的投资策略, 以减少风险并确保相对稳定的财富增长. 这导致投资回报率降低, 从而影响基金财富的增长和可用于福利支付的资金量.

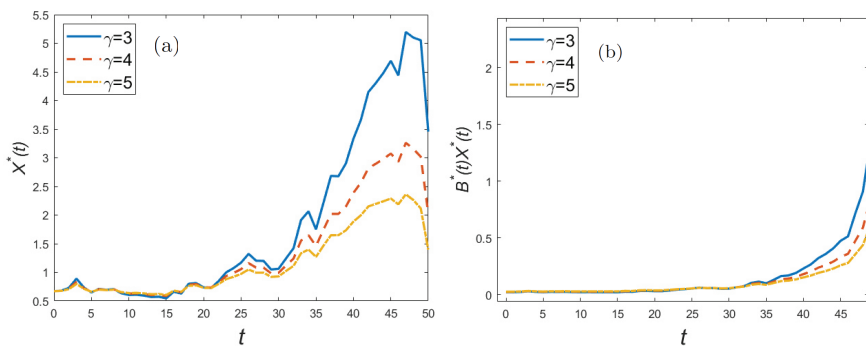


图 2 Cobb-Douglas 效用下风险规避系数  $\gamma$  对  $X^*(t)$  (a) 和  $B^*(t)X^*(t)$  (b) 的影响

图 3 显示了 Cobb-Douglas 效用下长寿参数  $\lambda$  对最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  的影响. 由图 3(a) 可以看出, 当  $\lambda$  增加时, 最优财富  $X^*(t)$  随之减少.  $\lambda$  作为长寿参数, 度量的是死亡力随时间减小的趋势.  $\lambda$  越大, 表示死亡力越低, 意味着需要配置更多的资金去支付退休人员的福利, 也使得可用于投资的资金减少, 从而导致财富水平的下降. 由图 3(b) 可以看出, 当  $\lambda$  增加时, 最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  也随之增加. 这是因为  $\lambda$  越大, 死亡力越低, 领取养老金福利的人数越多, 从而增加了养老基金的福利支出. 因此, 在长寿趋势越来越显著的情况下, 为应对长寿风险, 一方面, 需要制定有效的投资策略以获得更高的回报, 从而增加养老基金的财富积累. 另一方面, 通过制定合理的福利发放政策和福利支付水平, 确保福利支出与基金财富的可持续增长相匹配.

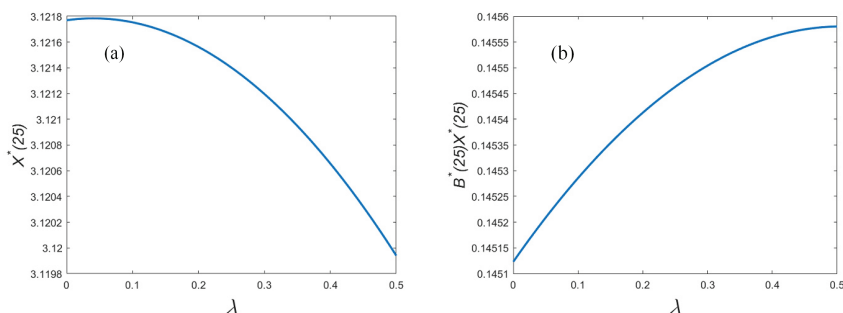


图 3 Cobb-Douglas 效用下长寿参数  $\lambda$  对  $X^*(t)$  (a) 和  $B^*(t)X^*(t)$  (b) 的影响

### 3.2 递归效用

图 4 显示了递归效用下权重参数  $\eta$  对最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  的影响. 由图 4 可以看出, 随着  $\eta$  的增加,  $X^*(t)$  减少而  $B^*(t)X^*(t)$  增加. 这是因为, 当  $\eta$  增加时, 对最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  的重视程度增加, 因此计划预计会产生更稳定的福利支付.

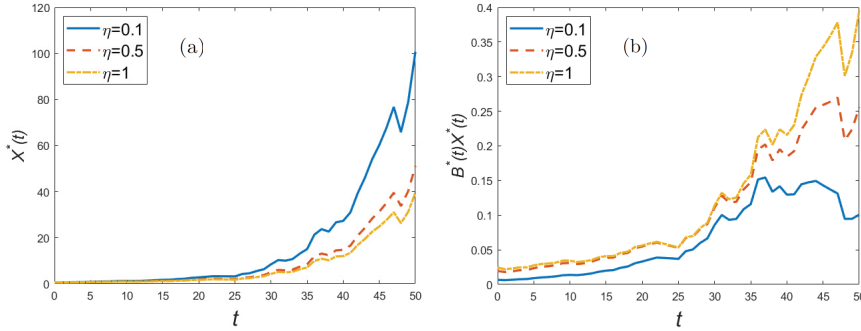


图 4 递归效用下权重参数  $\eta$  对  $X^*(t)$  (a) 和  $B^*(t)X^*(t)$  (b) 的影响

图 5 显示了递归效用下风险规避系数  $\gamma$  对最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  的影响. 由图 5 可以看出, 当  $\gamma$  增加时, 最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  均随之降低. 这是由于风险规避系数  $\gamma$  的增加会导致保守的投资和较低的福利支付.

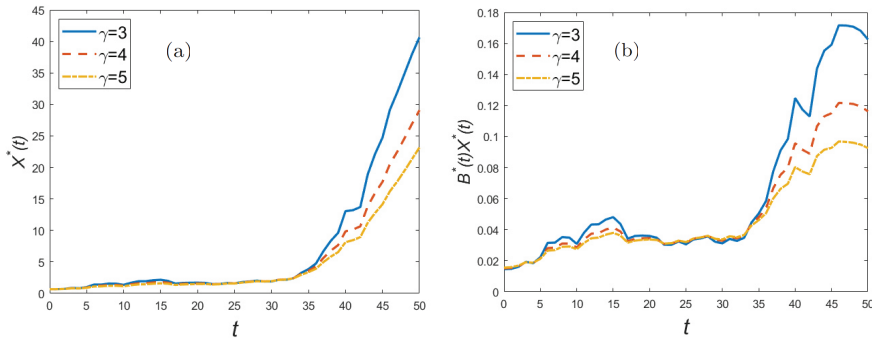


图 5 递归效用下风险规避系数  $\gamma$  对  $X^*(t)$  (a) 和  $B^*(t)X^*(t)$  (b) 的影响

图 6 显示了递归效用下长寿参数  $\lambda$  对最优财富  $X^*(t)$  和最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  的影响. 与 Cobb-Douglas 效用下的结果相似, 当  $\lambda$  增大时, 最优财富  $X^*(t)$  减少, 同时最优福利支付  $B^*(t)X^*(t)$  随之增加. 这是由于长寿参数  $\lambda$  的增大使得领取退休福利的人数增加导致的.

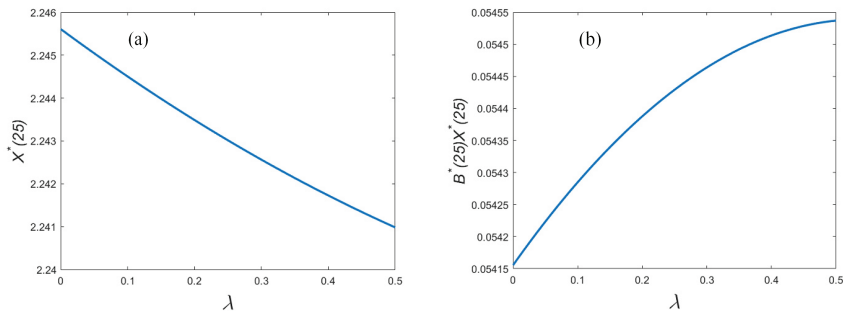


图 6 递归效用下长寿参数  $\lambda$  对  $X^*(t)$  (a) 和  $B^*(t)X^*(t)$  (b) 的影响

## 4 结论

本文首先基于 Cobb-Douglas 效用函数研究目标收益养老金计划的最优投资和福利调整问题. 以终端财富和福利回报的效用最大为优化目标, 求解最优的投资策略和福利调整策略. 目标收益养老金计划旨在为退休人员提供稳定和可持续的福利. 该计划的投资组合包括无风险债券和股票. 养老金管理者的回报和财富偏好使

用 Cobb-Douglas 效用函数建模. 考虑养老金计划参与者的长寿趋势, 采用了带有时间参数的死亡力模型. 针对金融市场模型不确定的特点, 采用鲁棒方法推导出最优的投资和收益调整策略. 进一步采用 Epstein-Zin 递归效用函数扩展了分析范围, 拓展了传统的 Cobb-Douglas 框架. 对于这两种效用函数, 采用动态规划方法得到了 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的解析解. 通过数值分析, 研究了不同因素对投资和福利调整策略的影响. 结果显示, 在目标收益养老金计划中, 基金发起人对福利支付以及对基金财富增长的关注程度对最优策略具有重要影响. 养老金发起者在制定投资和福利调整策略时应综合考虑具体情况, 以平衡退休人员的福利需求和基金的可持续性. 其次, 基金管理者的风险偏好也将对投资决策和福利调整策略产生影响. 风险偏好是指个体或机构对风险的接受程度和倾向. 不同的基金管理者可能有不同的风险承受能力和投资倾向, 这将直接影响他们的投资决策和对福利调整的态度. 最后, 长寿趋势使得养老金计划中的退休人数增加, 需要配置更多的资金去支付退休人员的福利, 为避免缺口的出现, 需要对资金进行有效的投资运营以增加收益, 并对福利的派发策略进行有效的调整. 综上所述, 养老金发起者在制定最优投资和福利调整策略时应综合考虑福利支付, 基金财富增长以及基金管理者的风险偏好, 通过调整缴费和福利支付策略, 以实现退休人员的福利需求和基金的可持续性之间的良好平衡, 确保养老金计划的稳定和可持续发展.

### 参考文献:

- [1] 国家卫生健康委员会, 全国老龄办. 2021年度国家老龄事业发展公报[EB/OL]. (2022-10-26)[2023-05-20]. [https://www.gov.cn/xinwen/2022-10/26/content\\_5721786.htm](https://www.gov.cn/xinwen/2022-10/26/content_5721786.htm).  
National Health Commission, Office of the National Committee on Aging. 2021 National development bulletin on aging[EB/OL]. (2022-10-26)[2023-05-20]. [https://www.gov.cn/xinwen/2022-10/26/content\\_5721786.htm](https://www.gov.cn/xinwen/2022-10/26/content_5721786.htm). (in Chinese)
- [2] 民政部, 全国老龄办. 2022年度国家老龄事业发展公报[EB/OL]. (2023-12-13)[2023-12-15]. <https://www.mca.gov.cn/n152/n165/c1662004999979996614/attr/315138.pdf>.  
Ministry of Civil Affairs, Office of the National Committee on Aging. 2022 National development bulletin on aging[EB/OL]. (2023-12-13)[2023-12-15]. <https://www.mca.gov.cn/n152/n165/c1662004999979996614/attr/315138.pdf>. (in Chinese)
- [3] 人力资源和社会保障部. 2021年度人力资源和社会保障事业发展统计公报[EB/OL]. (2022-06-07)[2023-05-20]. [http://www.mohrss.gov.cn/SYrlzyhshbzb/zwgk/szrs/tjgb/202206/t20220607\\_452104.html](http://www.mohrss.gov.cn/SYrlzyhshbzb/zwgk/szrs/tjgb/202206/t20220607_452104.html).  
Ministry of Human Resources and Social Security. Statistical bulletin on the development of human resources and social security in 2021[EB/OL]. (2022-06-07)[2023-05-20]. [http://www.mohrss.gov.cn/SYrlzyhshbzb/zwgk/szrs/tjgb/202206/t20220607\\_452104.html](http://www.mohrss.gov.cn/SYrlzyhshbzb/zwgk/szrs/tjgb/202206/t20220607_452104.html). (in Chinese)
- [4] 王沛祺. 多种市场风险环境下模型不确定的保险基金投资研究[D]. 天津: 天津大学, 2021.  
WANG P Q. Research on insurance fund investment problem with model uncertainty and multi-risk in financial market[D]. Tianjin: Tianjin University, 2021. (in Chinese)
- [5] WANG S X, RONG X M, ZHAO H. Optimal investment and benefit payment strategy under loss aversion for target benefit pension plans[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2019, 346: 205-218.
- [6] WANG S X, LU Y, SANDERS B. Optimal investment strategies and intergenerational risk sharing for target benefit pension plans[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2018, 80: 1-14.
- [7] WANG P Q, RONG X M, ZHAO H, et al. Robust optimal investment and benefit payment adjustment strategy for target benefit pension plans under default risk[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2021, 391: 113382.
- [8] ZHAO H, WANG S X. Optimal investment and benefit adjustment problem for a target benefit pension plan with Cobb-Douglas utility and Epstein-Zin recursive utility[J]. *European Journal of Operational Research*, 2022, 301(3): 1166-1180.
- [9] MILEVSKY M A, PROMISLOW S D, YOUNG V R. Killing the law of large numbers: Mortality risk premiums and the Sharpe ratio[J]. *Journal of Risk and Insurance*, 2006, 73(4): 673-686.
- [10] CAIRNS A J, BLAKE D, DOWD K. Pricing death: Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk[J]. *ASTIN Bulletin*, 2006, 36(1): 79-120.
- [11] KNELL M. Increasing life expectancy and NDC pension systems[J]. *Journal of Pension Economics and Finance*, 2018, 17(2): 170-199.
- [12] RONG X M, TAO C, ZHAO H. Target benefit pension plan with longevity risk and intergenerational equity[J]. *ASTIN Bulletin*, 2023, 53(1): 84-103.