不确定随机奇异时变时滞系统的鲁棒H_∞控制*

徐 放,王天成†

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264025)

摘 要:研究了不确定奇异时变时滞系统的鲁棒H_∞控制问题. 通过构造李雅普诺夫泛函, 应用自由矩阵不等式和伊藤公式, 设计了确保闭环系统对所有不确定性鲁棒均方可容许并且具有H_∞性能指标γ的控制器. 最后的数值实例验证了该方法的有效性.

关键词: 随机奇异系统; 时变时滞; 鲁棒H_∞控制

DOI:10.13568/j.cnki.651094.651316.2024.03.20.0001

中图分类号:TP13;O231.3 **文献标识码**:A **文章编号**:2096-7675(2024)05-0542-08

引文格式: 徐放,王天成. 不确定随机奇异时变时滞系统的鲁棒H_∞控制[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文),2024,41(5):542-549.

英文引文格式: XU Fang,WANG Tiancheng. Robust H_∞ control for uncertain stochastic singular systems with time-varying delays[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English),2024,41(5):542-549.

Robust H_∞ Control for Uncertain Stochastic Singular Systems with Time-Varying Delays

XU Fang, WANG Tiancheng

(*School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai Shandong 264025, China*)

Abstract: This article deals with the problem of robust H_∞ control for uncertain stochastic singular systems with time-varying delays. By constructing Lyapunov functional and employing improved free matrix inequality and Itô's formula, a state feedback controller is designed to ensure that the resulting closed-loop system is robustly mean-square admissible for all uncertainties and has an H_∞ performance index γ. Finally, an illustrative example is given to demonstrate the effectiveness of the present method.

Key words: stochastic singular system; time-varying delays; robust H_∞ control

0 引 言

现实中许多系统的变化趋势不仅与当前状态有关, 还取决于过去的状态, 这种现象称为时滞[1], 时滞产生的原因多种多样, 如传感器测量过程存在时滞, 信号传输过程存在时滞等. 时滞往往会导致控制系统性能恶化甚至破坏系统的稳定性. 近年来, 时滞系统的分析与综合成为国际控制领域的研究热点[2−4]. 相较于正则系统, 奇异系统适用度更广[5−7], 它可分解为动态子系统和代数子系统. 实际工程中, 系统模型不确定性以及系统随机性, 也广泛影响着系统性能[8−9]. 其中模型不确定性在鲁棒控制中地位十分重要, 为进行有效控制系统设计, 一个复杂的系统必须用一个相对简单的模型来描述. 研究系统模型的不确定性对于提高模型准确性、改进控制策略、优化控制设计都具有重要的意义. 鲁棒H_∞控制的设计目标是最大化系统的H_∞范数, 即将系统的灵敏度函数的最大值最小化, 使得系统对于各种不确定性和扰动具有稳定性并且保持良好的性能, 它在工程上易于实现, 所以应用十分广泛[10−12]. 随着工业智能化的逐步发展, 过于理想化的简单模型已经不能满足生产智能化需求. 基于此, 对上述领域的综合的复杂系统进行研究分析并设计H_∞控制器, 具有重要的理论和实际意义. 然而此类研究成果较少, 主要原因在于: 加入随机噪声可能会破坏系统结构, 随机奇异系统比较难以验证正则性和无脉冲性,

* 收稿日期: 2024-03-20
基金项目: 国家自然科学基金“传感器含有不确定性的随机非线性系统的输出反馈控制”(61973150).
作者简介: 徐放(1986—),男,硕士生,从事随机控制与鲁棒控制理论的研究,E-mail:muliushuifeng@163.com.
† 通讯作者: 王天成(1967—),男,博士,教授,主要从事随机控制与鲁棒控制理论的研究,E-mail:cumt_wtc@163.com.

运用随机微分方程理论研究系统稳定性会遇到很多麻烦, 以及所得出的矩阵不等式条件难以线性化. 这些都使得此研究具有较大的挑战. 本文主要是将时滞系统研究结果推广到不确定随机奇异系统, 重点解决随机理论对于系统稳定性的应用, 以及二次微分随机项的线性化等问题.

记号: $\mathcal{E}$为期望算子; $\mathcal{L}$为无穷小算子; $\boldsymbol{X}^+$表示$\boldsymbol{X}$的广义逆; $\deg\{\cdot\}$表示行列式的阶数; $\det\{\cdot\}$表示矩阵的行列式; $Sym\{\boldsymbol{X}\}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{diag}\{\cdot\}$代表对角块矩阵; $col\{\cdot\}$表示列向量; $L^2[0,\infty)$为定义在$[0,\infty)$上的向量值平方可积函数空间; $L^{E_2}[\Omega\times[0,\infty)]$为定义在$[\Omega\times[0,\infty)]$上平方可积的不可预测的完备的Hilbert向量值函数空间.

1　问题描述

考虑如下一类不确定随机奇异时滞系统

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}\mathrm{d}x(t)=[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t))x(t)+(\boldsymbol{A}_d+\Delta\boldsymbol{A}_d(t))x(t-h(t))+(\boldsymbol{B}_u+\Delta\boldsymbol{B}_u(t))u(t)+\boldsymbol{B}_v v(t)]\mathrm{d}t+\boldsymbol{B}_w x(t)\mathrm{d}w(t)\\ \quad z(t)=\boldsymbol{C}x(t)+\boldsymbol{C}_d x(t-h(t))+\boldsymbol{D}_u u(t)+\boldsymbol{D}_v v(t),\quad x(t)=\varphi(t),\ t\in[-h(t),\ 0]\end{cases}\tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbf{R}^n$是系统状态, $u(t)\in\mathbf{R}^m$是控制输入, $v(t)\in\mathbf{R}^p$是属于$L^2[0,\infty)$空间的外部扰动, $z(t)\in\mathbf{R}^q$是属于$L^{E_2}[\Omega\times[0,\infty)]$空间的被调输出, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}_d$, $\boldsymbol{B}_u$, $\boldsymbol{B}_v$, $\boldsymbol{B}_w$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}_d$, $\boldsymbol{D}_u$, $\boldsymbol{D}_v$为已知的具有适当维数的实矩阵, $\mathrm{rank}\boldsymbol{E}=r\le n$. $\Delta\boldsymbol{A}(t)$, $\Delta\boldsymbol{A}_d(t)$, $\Delta\boldsymbol{B}_u(t)$表示范数有界的不确定参数矩阵, 并且有如下结构

$$\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{A}(t) & \Delta\boldsymbol{A}_d(t) & \Delta\boldsymbol{B}_u(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_a & \boldsymbol{M}_d & \boldsymbol{M}_b\end{bmatrix}\tag{2}$$

其中: $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{M}_a$, $\boldsymbol{M}_d$, $\boldsymbol{M}_b$为已知的具有适当维数的实矩阵, $\boldsymbol{F}(t)$表示具有Lebesgue可测元的未知函数矩阵, 满足

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\le\boldsymbol{I},\forall t\tag{3}$$

$w(t)$是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一维标准布朗运动, 并且适用于事件域$\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge0}$. 假设$\mathrm{d}w(t)$和$x(t)$是线性独立的, 并且满足下面的乘法规则[9]

$$\mathrm{d}t\mathrm{d}t=\mathrm{d}t\mathrm{d}w(t)=\mathrm{d}w(t)\mathrm{d}t=0,\ \mathcal{E}\{\mathrm{d}w(t)\}=0,\ \mathcal{E}\left\{\mathrm{d}w(t)\mathrm{d}w(t)^{\mathrm{T}}\right\}=\boldsymbol{I}\mathrm{d}t,$$

$h(t)$为状态时变时滞, 满足$0\le h(t)\le d$, $0\le\dot{h}(t)\le\mu<1$, 其中d,μ为正标量, 为了简便将$h(t)$记为h. $\varphi(t)\in C[-h,0]$为相容的连续向量值初值函数.

本文的目的是设计一个无记忆的状态反馈控制器

$$u(t)=\boldsymbol{K}x(t),\boldsymbol{K}\in\mathbf{R}^{m\times n}\tag{4}$$

使得闭环系统

$$\boldsymbol{E}\mathrm{d}x(t)=\left[\tilde{\boldsymbol{A}}_k x(t)+\tilde{\boldsymbol{A}}_d x(t-h)+\boldsymbol{B}_v v(x)\right]\mathrm{d}t+\boldsymbol{B}_w x(t)\mathrm{d}w(t)\tag{5}$$

1) 当$v(t)=0$时, 系统关于平衡点的解, 是鲁棒均方可容许的.

2) 从外部扰动$v(t)$到被调输出$z(t)$的传递函数$G_{wz}(s)$的广义H_∞范数, 不超过给定的实数γ, 即$\|z(t)\|_{E_2}\le\gamma\|v(t)\|_2$.

其中: $\tilde{\boldsymbol{A}}_k=\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{B}}_u\boldsymbol{K}$, $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t)$, $\tilde{\boldsymbol{A}}_d=\boldsymbol{A}_d+\Delta\boldsymbol{A}_d(t)$, $\tilde{\boldsymbol{B}}_u=\boldsymbol{B}_u+\Delta\boldsymbol{B}_u(t)$, $\|v(t)\|_2^2=\int_0^\infty v^{\mathrm{T}}(t)v(t)\mathrm{d}t<\infty$, $\|z(t)\|_{E_2}^2=\mathcal{E}\int_0^\infty z^{\mathrm{T}}(t)z(t)\mathrm{d}t<\infty$.

令$f=\tilde{\boldsymbol{A}}_k x(t)+\tilde{\boldsymbol{A}}_d x(t-h)+\boldsymbol{B}_v v(x)$, $g=\boldsymbol{B}_w x(t)$. 则闭环系统(5)变为$\boldsymbol{E}\mathrm{d}x(t)=f\mathrm{d}t+g\mathrm{d}w(t)$, 它可以看作是$\boldsymbol{E}x(t)=\boldsymbol{E}x(t_0)+\int_{t_0}^t f\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t g\mathrm{d}w(s)$的微分形式.

注 1 本文的重点在于设计出基于状态反馈的无记忆的控制器增益矩阵$\boldsymbol{K}$. 其中状态反馈是指将系统状态变量乘以相应的反馈系数, 反馈到输入端与参考输入相加, 其和作为被控系统的控制信号. 相对于传统的输出反馈, 状态反馈能够更有效地控制系统, 使其稳定正常工作. 而无记忆性, 则是指控制器的输出仅取决于当前的输入信号, 而不考虑系统的历史状态. 这种控制器响应速度快, 制造和维护成本低; 稳定性强, 便于预测和分析; 在工业控制领域应用广泛, 比如工业自动化、传感器网络、嵌入式系统等.

假设 1[13] $\mathrm{rank}([\boldsymbol{E}\quad \boldsymbol{B}_w])=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=r$.

如果假设成立, 根据SVD, 则存在可逆矩阵$\boldsymbol{L_1},\boldsymbol{L_2}$, 使得闭环系统(5)参数矩阵有如下分解

$$\bar{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{E}\boldsymbol{L_2}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\bar{\boldsymbol{A}}_k=\boldsymbol{L}_1\tilde{\boldsymbol{A}}_k\boldsymbol{L_2}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4\end{bmatrix},\bar{\boldsymbol{B}}_v=\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{B}_v=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{v1}\\ \boldsymbol{B}_{v2}\end{bmatrix},$$
$$\bar{\boldsymbol{A}}_d=\boldsymbol{L}_1\tilde{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{L_2}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{d1} & \boldsymbol{A}_{d2}\\ \boldsymbol{A}_{d3} & \boldsymbol{A}_{d4}\end{bmatrix},\bar{\boldsymbol{B}}_w=\boldsymbol{L_1}\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{L_2}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{w1} & \boldsymbol{B}_{w2}\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

其中: $\boldsymbol{A}_1\in\mathbf{R}^{r\times r}$, $\boldsymbol{A}_{d1}\in\mathbf{R}^{r\times r}$, $\boldsymbol{B}_{v1}\in\mathbf{R}^{r\times \mathrm{m}}$, $\boldsymbol{B}_{w1}\in\mathbf{R}^{r\times r}$, 令$\boldsymbol{L}_2^{-1}x(t)=col\{x_1(t),\ x_2(t)\}$, $\boldsymbol{L}_2^{-1}x(t-h)=col\{x_1(t-h),$ $x_2(t-h)\}$, $x_1(t)\in\mathbf{R}^r$, $x_1(t-h)\in\mathbf{R}^r$. 则闭环系统(5)被分解为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x_1(t)=&[\boldsymbol{A}_1x_1(t)+\boldsymbol{A}_2x_2(t)+\boldsymbol{A}_{d1}x_1(t-h)+\boldsymbol{A}_{d2}x_2(t-h)+\boldsymbol{B}_{v1}v(t)]\,\mathrm{d}t\\ &+[\boldsymbol{B}_{w1}x_1(t)+\boldsymbol{B}_{w2}x_2(t)]\,\mathrm{d}w(t),\\ 0=&[\boldsymbol{A}_3x_1(t)+\boldsymbol{A}_4x_2(t)+\boldsymbol{A}_{d3}x_1(t-h)+\boldsymbol{A}_{d4}x_2(t-h)+\boldsymbol{B}_{v2}v(t)]\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

可以看出, 系统被分解为动态子系统和代数子系统, 伊藤随机项仅存在于动态子系统中, 不会破坏系统结构.

定义 1[8] 1) 如果$\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$不恒等于0, 则称矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是正则的.

2) 如果$\deg(\det(s\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})$, 则称矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$是无脉冲的.

3) 对于随机系统(1)在$u(t)=0$和$v(t)=0$的情况下, 如果$t\to\infty$时, 有$\mathcal{E}\|x(t)\|^2\to 0$, 则称系统关于平衡点对于所有的不确定性是鲁棒均方稳定的.

4) 如果矩阵对$(\boldsymbol{E},\tilde{\boldsymbol{A}})$正则, 无脉冲, 并且对所有的不确定性是鲁棒均方稳定的, 则称系统(1)是鲁棒均方可容许的.

引理 1 对于闭环系统(5), 存在矩阵$\boldsymbol{N}_a\in\mathbf{R}^{n\times n},\boldsymbol{N}_d\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 正定矩阵$\boldsymbol{Z}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 使得下列矩阵不等式成立.

$$-\int_{t-d}^{t}f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}f\mathrm{d}s\le\xi^{\mathrm{T}}\left(Sym\left\{\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\right\}+d\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}\right)\xi,$$

其中: $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{N}_a\quad \boldsymbol{N}_d]$, $\boldsymbol{\Pi}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}\end{bmatrix}$, $\xi=\xi(t)=col\{x(t),x(t-h)\}$, $f=f(s)$, $g=g(s)$.

证明 由$\boldsymbol{Z}>0$可得$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_i$, 其中$\boldsymbol{Z}_i$是可逆矩阵. 令$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_i & \boldsymbol{Z}_i^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, 则有$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}\end{bmatrix}\ge 0$, 进一步有

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}\int_{t-d}^{t}\begin{bmatrix}f\\ \xi\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z} & \boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f\\ \xi\end{bmatrix}\mathrm{d}s\\ &=\int_{t-d}^{t}f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}f\mathrm{d}s+d\xi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}\xi+2\mathcal{E}\left(\int_{t-d}^{t}f^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s+\int_{t-d}^{t}g^{\mathrm{T}}\mathrm{d}w-\int_{t-d}^{t}g^{\mathrm{T}}\mathrm{d}w\right)\boldsymbol{N}\xi\\ &=\int_{t-d}^{t}f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}f\mathrm{d}s+\xi^{\mathrm{T}}\left(Sym\left\{\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\right\}+d\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}\right)\xi\ge 0.\end{aligned}$$

整理后便得出结论.

引理 2[14] 矩阵$\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{H},\boldsymbol{L}$拥有适当的维数, 其中$\boldsymbol{\Sigma}$为对称阵, 并且矩阵$\boldsymbol{F}(t)$满足$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\le\boldsymbol{I}$. 那么$\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{L}+\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}<0$, 当且仅当存在一个标量$\varepsilon>0$, 使得$\boldsymbol{\Sigma}+\varepsilon\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}<0$.

引理 3[15] 给定矩阵$\boldsymbol{S}>0$和适当维数的矩阵$\boldsymbol{L}$, 有$-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{L}\le\boldsymbol{S}-\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{L}$.

引理 4[16] 对矩阵$\boldsymbol{E}\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E})=r\le n$, 进行满秩分解, 可得$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_l\boldsymbol{E}_r^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}_l)=\mathrm{rank}(\boldsymbol{E}_r)=r$, 同时令$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$, 使得$\boldsymbol{E}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_l>0$, 令$\boldsymbol{\Theta}$为适当维数的可逆矩阵, $\boldsymbol{\Gamma},\boldsymbol{\Lambda}$分别为$\boldsymbol{E}$的列满秩的左核矩阵和行满秩的右核矩阵, 即$\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{E}=0$, $\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}=0$. 则$\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\Theta\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}$是可逆的, 且它的逆可表示为$\left(\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Lambda}\bar{\boldsymbol{\Theta}}\boldsymbol{\Gamma}$, 其中: $\bar{\boldsymbol{P}}=\bar{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{E}_r^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}_r=\left(\boldsymbol{E}_l^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_l\right)^{-1}$, $\bar{\boldsymbol{\Theta}}$可逆, $\bar{\boldsymbol{\Theta}}=(\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda})^{-1}\boldsymbol{\Theta}^{-1}\left(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$.

2 主要结果

2.1 鲁棒可容许性分析

定理 1 如果存在$n\times n$维矩阵$\boldsymbol{P}>0,\ \boldsymbol{Q}>0,\ \boldsymbol{Z}>0$, $(n-r)\times(n-r)$维可逆阵$\boldsymbol{\Phi}$和$n\times n$维矩阵$\boldsymbol{N}_a,\boldsymbol{N}_d$, 使得下列矩阵不等式成立. 则闭环系统(5)是鲁棒均方可容许的.

$$\boldsymbol{\Psi}_1=Sym\left\{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}_v+\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Pi}}\right\}+\hat{\boldsymbol{B}}_w^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^+)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^+\hat{\boldsymbol{B}}_w+\hat{\boldsymbol{Q}}_h+d\hat{\boldsymbol{A}}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{A}}_v+d\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\hat{\boldsymbol{N}}<0 \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{E}=0,\ \boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}=0,\\
&\hat{\boldsymbol{A}}_v=\tilde{\boldsymbol{A}}_k\boldsymbol{e}_1+\tilde{\boldsymbol{A}}_d\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{e}_3,\ \hat{\boldsymbol{B}}_w=\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{e}_1,\ \hat{\boldsymbol{Q}}_h=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}(1-\mu)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_2,\\
&\hat{\boldsymbol{N}}=\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{N}_d\boldsymbol{e}_2,\ \hat{\boldsymbol{\Pi}}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{E}\boldsymbol{e}_2,\\
&\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times p}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0_{n\times n} & \boldsymbol{I}_{n\times n} & 0_{n\times p}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0_{p\times n} & 0_{p\times n} & \boldsymbol{I}_{p\times p}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

证明 首先, 我们证明闭环系统(5)在$v(t)=0$时是正则无脉冲的. 按照假设中的分解方法, 令

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{L}_1^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}_1^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{P}_3 & \boldsymbol{P}_4\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{\Lambda}}=\boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{H}_1=\begin{bmatrix}0\\ \boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix},\ \bar{\boldsymbol{\Gamma}}=\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{L}_1^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}_{n-r}\end{bmatrix},\\
&\bar{\boldsymbol{\Phi}}=\boldsymbol{H}_2^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{H}_1^{-\mathrm{T}},\ \boldsymbol{N}_a=\boldsymbol{L}_1^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{L}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_{a1} & \boldsymbol{N}_{a2}\\ \boldsymbol{N}_{a3} & \boldsymbol{N}_{a4}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{N}_d=\boldsymbol{L}_1^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_d\boldsymbol{L}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_{d1} & \boldsymbol{N}_{d2}\\ \boldsymbol{N}_{d3} & \boldsymbol{N}_{d4}\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

由$\boldsymbol{P}>0,\ \boldsymbol{Z}>0$, 根据矩阵不等式(6), 可得

$$Sym\left\{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}_v+\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Pi}}\right\}+\hat{\boldsymbol{Q}}_h<0 \tag{7}$$

对不等式(7)左边和右边分别乘以$\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}} & 0_{n\times n} & 0_{n\times p}\end{bmatrix}$和它的转置, 可得

$$Sym\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_k+\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}\bar{\boldsymbol{A}}_k+\bar{\boldsymbol{N}}_a^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}\right\}+\boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}_2<0.$$

由$\boldsymbol{Q}>0$, 可得$Sym\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_k+\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}\bar{\boldsymbol{A}}_k+\bar{\boldsymbol{N}}_a^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{E}}\right\}<0$, 即$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_1 & \boldsymbol{\Delta}_2\\ * & Sym\left\{\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_4\right\}\end{bmatrix}<0$, 根据文献[6]中引理2.4, 知$\boldsymbol{A}_4$非奇异, 进一步根据文献[6]中引理2.3, 得出矩阵对$(\boldsymbol{E},\tilde{\boldsymbol{A}}_k)$是正则无脉冲的, 其中$\boldsymbol{\Delta}_1$, $\boldsymbol{\Delta}_2$与本文讨论无关.

同样的方法, 对不等式(7)左边和右边分别乘以$\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}} & 0_{n\times p}\end{bmatrix}$和它的转置, 可得

$$Sym\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_k+\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}\bar{\boldsymbol{A}}_k+\bar{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{A}}_d+\bar{\boldsymbol{\Lambda}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Gamma}}\bar{\boldsymbol{A}}_d\right\}+\boldsymbol{L}_2^{\mathrm{T}}\mu\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}_2<0.$$

由$0\le\mu<1$,可得$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_3 & \boldsymbol{\Delta}_4\\ * & Sym\left\{\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}_4+\boldsymbol{A}_{d4})\right\}\end{bmatrix}<0$, 即矩阵对$(\boldsymbol{E},\tilde{\boldsymbol{A}}_k+\tilde{\boldsymbol{A}}_d)$是正则无脉冲的, 其中$\boldsymbol{\Delta}_3$, $\boldsymbol{\Delta}_4$与本文讨论无关.

下面, 我们讨论在$v(t)=0$的条件下, 闭环系统(5)关于平衡点的解对所有不确定性是鲁棒均方稳定的.

构造如下李雅普诺夫泛函

$$\begin{aligned}
V(t,x_\tau)&=V_1(x_\tau)+V_2(t)+V_3(t),\\
V_1(x_\tau)&=x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}x(t),\\
V_2(t)&=\int_{t-h}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}x(s)\mathrm{d}s,\\
V_3(t)&=\int_{t-d}^{t}\int_{\theta}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{E}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

由泛函的构造, 可知$V(t,x_\tau)\in C^{1,2}([-h,0]\times\mathbf{R}^n)$, 根据伊藤公式, 沿着闭环系统(5)解的轨道对$V(t,x_\tau)$微分, 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\mathrm{d}V_1(x_\tau) &= \mathcal{E}\frac{\partial V_1}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\mathcal{E}\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 \\
&= 2\mathcal{E}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PE}\mathrm{d}x(t) + \mathcal{E}\mathrm{d}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEE}^{+}\boldsymbol{E}\mathrm{d}x(t) \\
&= 2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}f\mathrm{d}t + \mathrm{tr}\left(g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEE}^{+}g\mathrm{d}w(t)\mathrm{d}w(t)^{\mathrm{T}}\right) \\
&= 2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}f\mathrm{d}t + g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEE}^{+}g\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}V_1(x_\tau)\mathrm{d}t. \\
\mathcal{E}\mathrm{d}V_2(t) &= \mathcal{E}\frac{\partial V_2}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&= x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}x(t)\mathrm{d}t - x^{\mathrm{T}}(t-h)(1-\dot{h})\boldsymbol{Q}x(t-h)\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}V_2(t)\mathrm{d}t. \\
\mathcal{E}\mathrm{d}V_3(t) &= \mathcal{E}\frac{\partial V_3}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{E}d\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZE}\dot{x}(t)\mathrm{d}t - \mathcal{E}\int_{t-d}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{ZE}\dot{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= df^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}f\mathrm{d}t - \int_{t-d}^{t}f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}f\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}V_3(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由$\boldsymbol{\Gamma E}=0$, 进行如下构造

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\mathrm{d}V_4(x_\tau) &= \mathcal{E}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Lambda\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma E}\mathrm{d}x(t) \\
&= x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Lambda\Phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Gamma}\left[\tilde{\boldsymbol{A}}_k x(t) + \tilde{\boldsymbol{A}}_d x(t-h) + \boldsymbol{B}_v v(x)\right]\mathrm{d}t \\
&= \mathcal{L}V_4(x_\tau)\mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

综上, 根据引理1, 可得

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}V(t,x_\tau) &= \mathcal{L}V_1(x_\tau) + \mathcal{L}V_2(t) + \mathcal{L}V_3(t) + \mathcal{L}V_4(x_\tau) \\
&= 2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}f + g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEE}^{+}g + x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}x(t) - x^{\mathrm{T}}(t-h)\boldsymbol{Q}x(t-h) + df^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}f^{\mathrm{T}} - \int_{t-d}^{t}f^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}f\mathrm{d}s \\
&\le 2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}f + g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PEE}^{+}g + x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}x(t) - x^{\mathrm{T}}(t-h)(1-\mu)\boldsymbol{Q}x(t-h) + df^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}f^{\mathrm{T}} \\
&\quad + \xi^{\mathrm{T}}\left(Sym\left\{\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}\right\} + d\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{N}\right)\xi \\
&= \eta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_1\eta.
\end{aligned}$$

其中: $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{PE}+\boldsymbol{\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi\Lambda}^{\mathrm{T}}$, $\eta=\eta(t)=col\{x(t),x(t-h),v(t)\}$.

注 2 $\mathrm{d}V_1(x_\tau)$中之所以用到广义逆是为了使$\boldsymbol{P}$的两侧出现$\boldsymbol{E}$, 以便后续结合引理4对矩阵不等式进行线性化.

根据式(6), 在$v(t)=0$时, 更有$\boldsymbol{\Psi}_1<0$, 则

$$\mathcal{E}\mathcal{L}V(t,x_\tau) \le \mathcal{E}\eta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_1\eta \le -\alpha\mathcal{E}\|\eta(t)\|^2 \le -\alpha\mathcal{E}\|x(t)\|^2 < 0 \tag{8}$$

其中: $\alpha=\min\lambda(-\boldsymbol{\Psi}_1)>0$. 由式(8), 可得$\lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{E}V(t,x_\tau)=0$和$\mathcal{E}\|x(t)\|^2\le-(1/\alpha)\mathcal{E}\mathcal{L}V(t,x_\tau)$. 由富比尼定理[17]和邓金公式[18], 可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \mathcal{E}\|x(t)\|^2\mathrm{d}x \le -\tfrac{1}{\alpha}\mathcal{E}\int_0^\infty \mathcal{L}V(t,x_\tau)\mathrm{d}x \\
&= -\tfrac{1}{\alpha}\left[\mathcal{E}\lim_{t\to\infty}V(t,x_\tau) - V(0,\varphi(0))\right] \le \tfrac{1}{\alpha}V(0,\varphi(0)) \le \infty
\end{aligned} \tag{9}$$

注意到$\mathcal{E}\|x(t)\|^2$在$[0,\infty)$上是一致连续的, 根据芭芭拉特引理[19]和式(9), 可得$\lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{E}\|x(t)\|^2=0$. 所以闭环系统(5)在$v(t)=0$的条件下对所有不确定性是鲁棒均方稳定的.

综上所述, 闭环系统(5)在$v(t)=0$的条件下是鲁棒均方可容许的.

2.2 鲁棒H_∞性能分析与控制器设计

定理 2 给定标量$\gamma>0$, 如果存在$n\times n$维矩阵$\boldsymbol{P}>0$, $\boldsymbol{Q}>0$, $\boldsymbol{Z}>0$, $(n-r)\times(n-r)$维可逆阵$\boldsymbol{\Phi}$和$n\times n$维矩阵$\boldsymbol{N}_a,\boldsymbol{N}_d$, 使得下列矩阵不等式成立. 则存在一个状态反馈控制器(4), 使得闭环系统(5)是鲁棒均方可容许的, 并且具有H_∞性能指标γ.

$$\boldsymbol{\Psi}_2=Sym\left\{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}_v+\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Pi}}\right\}+\hat{\boldsymbol{B}}_w^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\hat{\boldsymbol{B}}_w+\hat{\boldsymbol{Q}}_h+d\hat{\boldsymbol{A}}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{A}}_v+d\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\hat{\boldsymbol{N}}+\hat{\boldsymbol{Z}}_c^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Z}}_c-\gamma^2\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3<0 \quad (10)$$

其中: $\hat{\boldsymbol{Z}}_c=\boldsymbol{C}_k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{D}_v\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{C}_k=\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}_uK$.

证明 给定标量$\gamma>0$, 构造性能指标函数$J=\mathcal{E}\int_0^\infty[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2v^{\mathrm{T}}(t)v(t)]\mathrm{d}t$. 根据上述李雅普诺夫函数的构造, 在零初始条件下, 对任意非零$v(t)\in L^2[0,+\infty)$, 有

$$J\le\mathcal{E}\int_0^\infty[z^{\mathrm{T}}(t)z(t)-\gamma^2v^{\mathrm{T}}(t)v(t)+\mathcal{L}V(t,x(t))]\mathrm{d}t=\int_0^\infty\eta^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}_2\eta\mathrm{d}t.$$

由条件(10), 可得$J\le0$, 即$\|z(t)\|_{E_2}\le\gamma\|v(t)\|_2$, 所以闭环系统(5)具有$H_\infty$性能指标$\gamma$.

2.3 线性矩阵不等式化

定理 3 给定标量$\gamma>0$, 如果存在$n\times n$维矩阵$\widehat{\boldsymbol{P}}>0$, $\widehat{\boldsymbol{Q}}>0$, $\widehat{\boldsymbol{Z}}>0$, $(n-r)\times(n-r)$维可逆矩阵$\widehat{\boldsymbol{\Phi}}$, $n\times n$维矩阵$\widehat{\boldsymbol{N}}_a,\widehat{\boldsymbol{N}}_d$, 及适当维数矩阵$\boldsymbol{Y}$, 使得矩阵不等式(11)成立. 则存在一个状态反馈控制器$u(t)=\boldsymbol{Y}\left(\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Lambda}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}\Gamma\right)^{-1}x(t)$, 使得闭环系统(5)是鲁棒均方可容许的, 并且具有H_∞性能指标γ.

$$\boldsymbol{\Psi}_3=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_1 & \widehat{\boldsymbol{\Xi}}_2\\ * & \widehat{\boldsymbol{\Xi}}_3\end{bmatrix}<0 \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned}
&\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_1=Sym\left\{\boldsymbol{W}_1{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}_2+\widehat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{\Pi}}\right\}+\widehat{\boldsymbol{Q}}_h+\varepsilon\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1-\gamma^2\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3,\\
&\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_2=\left[\boldsymbol{W}_3^{\mathrm{T}}\quad \widehat{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}}\quad \widehat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\quad \widehat{\boldsymbol{B}}_w^{\mathrm{T}}\quad \widehat{\boldsymbol{Z}}_c^{\mathrm{T}}\right],\\
&\widehat{\boldsymbol{\Xi}}_3=\mathrm{diag}\left\{-d^{-1}\widehat{\boldsymbol{Z}}+\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}},-\varepsilon\boldsymbol{I}_n,d^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{Z}}-Sym\left\{\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\right\}\right),-\boldsymbol{E}_r^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}_r,-\boldsymbol{I}_q\right\},\\
&\boldsymbol{W}_1=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{W}_2=\left(\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{Y}\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_d\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{e}_3,\\
&\boldsymbol{W}_3=\left(\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{Y}+\varepsilon\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_d\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{B}_v\boldsymbol{e}_3,\\
&\widehat{\boldsymbol{N}}=\widehat{\boldsymbol{N}}_a\boldsymbol{e}_1+\widehat{\boldsymbol{N}}_d\boldsymbol{e}_2,\ \widehat{\boldsymbol{\Pi}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_2,\ \widehat{\boldsymbol{Q}}_h=\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}}(1-\mu)\widehat{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{e}_2,\\
&\widehat{\boldsymbol{M}}=\left(\boldsymbol{M}_a\widehat{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{M}_b\boldsymbol{Y}\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{M}_d\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{e}_2,\ \widehat{\boldsymbol{B}}_w=\boldsymbol{E}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{B}_w\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{e}_1,\\
&\widehat{\boldsymbol{Z}}_c=\left(\boldsymbol{C}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}+\boldsymbol{D}_u\boldsymbol{Y}\right)\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{C}_d\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{D}_v\boldsymbol{e}_3,\ \widehat{\boldsymbol{\Omega}}=\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Lambda}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}\boldsymbol{\Gamma}.
\end{aligned}$$

证明 首先分离系统中的不确定项$\hat{\boldsymbol{A}}_v=\hat{\boldsymbol{A}}_c+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\hat{\boldsymbol{M}}$, 并对式(10)中$d\hat{\boldsymbol{A}}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}\hat{\boldsymbol{A}}_v$应用舒尔补引理, 可得

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Upsilon}_1+\boldsymbol{\Upsilon}_2 & \hat{\boldsymbol{A}}_c^{\mathrm{T}}\\ * & -d^{-1}\boldsymbol{Z}^{-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\boldsymbol{F}(t)\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{M}} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}}\\ 0\end{bmatrix}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Omega}} & \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}<0 \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Upsilon}_1=Sym\left\{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{A}}_c+\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Pi}}\right\}+\hat{\boldsymbol{Q}}_h-\gamma^2\boldsymbol{e}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_3,\\
&\boldsymbol{\Upsilon}_2=d\hat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}^{-1}\hat{\boldsymbol{N}}+\hat{\boldsymbol{B}}_w^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\hat{\boldsymbol{B}}_w+\hat{\boldsymbol{Z}}_c^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Z}}_c,\\
&\hat{\boldsymbol{A}}_c=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{K})\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{e}_2,\\
&\hat{\boldsymbol{M}}=(\boldsymbol{M}_a+\boldsymbol{M}_b\boldsymbol{K})\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{M}_d\boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}$$

根据引理2和舒尔补引理, 可知式(12)成立, 当且仅当存在标量$\varepsilon>0$, 使得下面矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Upsilon}_1+\boldsymbol{\Upsilon}_2+\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Omega}} & \hat{\boldsymbol{A}}_c^{\mathrm{T}}+\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} \\ * & -d^{-1}\boldsymbol{Z}^{-1}+\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & 0 \\ * & * & -\varepsilon\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0.$$

对$\boldsymbol{\Upsilon}_2$反复使用舒尔补引理, 可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_1 & \boldsymbol{\Xi}_2 \\ * & \boldsymbol{\Xi}_3 \end{bmatrix}<0 \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Xi}_1=\boldsymbol{\Upsilon}_1+\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Omega}},\\
&\boldsymbol{\Xi}_2=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}_c^{\mathrm{T}}+\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{M}}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{N}}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{B}}_w^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{Z}}_c^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\\
&\boldsymbol{\Xi}_3=\mathrm{diag}\left\{-d^{-1}\boldsymbol{Z}^{-1}+\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}},-\varepsilon\boldsymbol{I}_n,-d^{-1}\boldsymbol{Z},-\left(\boldsymbol{E}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_l\right)^{-1},-\boldsymbol{I}_q\right\},\\
&\hat{\boldsymbol{B}}_w=\boldsymbol{E}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{+}\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{e}_1.
\end{aligned}$$

对矩阵不等式(13)左边和右边分别乘以$\mathrm{diag}\{\boldsymbol{\Omega}^{-\mathrm{T}},\boldsymbol{\Omega}^{-\mathrm{T}},\boldsymbol{I}_p,\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{\Omega}^{-1},\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{I}_q\}$和它的转置, 并应用引理3, 只要线性矩阵不等式$\boldsymbol{\Psi}_3<0$成立, 则有式(13)成立, 其中$\widehat{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}^{-1}$, $\widehat{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{\Omega}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Omega}^{-1}$, $\widehat{\boldsymbol{Z}}=\boldsymbol{Z}^{-1}$, $\widehat{\boldsymbol{N}}_a=\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{\Omega}^{-1}$, $\widehat{\boldsymbol{N}}_d=\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{N}_d\boldsymbol{\Omega}^{-1}$.

注 3 对$\boldsymbol{E}$进行满秩分解, 可得$\hat{\boldsymbol{B}}_w^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}^{+}\hat{\boldsymbol{B}}_w=\hat{\boldsymbol{B}}_w^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}^{+})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_r(\boldsymbol{E}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_l)\boldsymbol{E}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}^{+}\hat{\boldsymbol{B}}_w$, 根据引理4, 可知$\boldsymbol{E}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{E}_l$可逆, 且其逆可表示为$\boldsymbol{E}_r^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{E}_r$.

3　仿真实例

考虑如下不确定随机奇异时滞系统(1), 参数如下

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1.2&0\\0.8&-0.9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix}-0.2&0\\0&-0.5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_u=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_v=\begin{bmatrix}0.3\\0.2\end{bmatrix},\\
&\boldsymbol{B}_w=\begin{bmatrix}-0.5&0.3\\0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}_d=\begin{bmatrix}0.1&0\\0&0.2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_u=\begin{bmatrix}0.8\\0.6\end{bmatrix},\ \boldsymbol{D}_v=\begin{bmatrix}0.3\\0.5\end{bmatrix},\\
&\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{M}_a=\begin{bmatrix}0.3&0\\0&0.2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{M}_d=\begin{bmatrix}0.2&0\\0&0.1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{M}_b=\begin{bmatrix}0.1\\0.1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix}\sin t&\cos t\\0&0\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

取时滞上界$d=1.2$, 时滞导数上界$\mu=0.2$, 应用YALMIP工具箱sdpt3求解器, 可求得定理3最优鲁棒H_∞控制器的增益$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-1.085\,9 & -0.130\,3\end{bmatrix}$, 最小性能指标$\gamma=0.63$.

图1和图2分别展示了无控制系统和本文设计的H_∞控制系统的状态和噪声响应, 验证了该控制器设计的有效性.

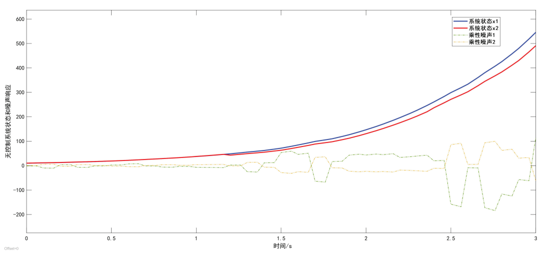

图 1　无控制系统状态和噪声响应

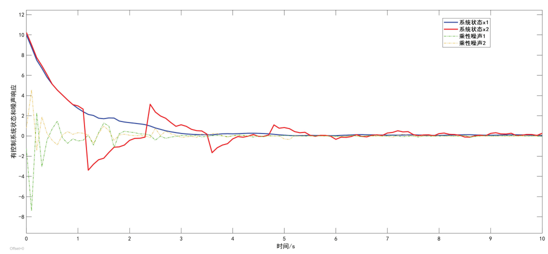

图 2　有控制系统状态和噪声响应

4 结 论

本文针对一类不确定随机奇异时变时滞系统, 通过构造李雅普诺夫泛函, 并运用随机微分方程理论、矩阵分解及放缩等方法, 得到了系统基于线性矩阵不等式的鲁棒均方可容许, 且具有γ次优H_∞性能的充分条件. 应用YALMIP工具箱求解了优化问题, 有效验证了结论. 随着社会不断发展, 工业智能化不断被提上日程, 未来对实际系统建模不再是理想化的简单模型, 而是考虑多种因素的复杂模型. 因此, 对于本文提出的系统进行更深层次的研究与综合将会是未来复杂系统研究的趋势. 同时, 今后仍有许多工作需要完善, 比如改进放缩条件、进一步降低随机奇异时滞系统的保守性等.

参考文献:

[1] FRIDMAN E. Introduction to time-delay systems: Analysis and control[M]. Cham: Springer International Publishing, 2014.

[2] CHEN J, PARK J H, XU S Y, et al. A survey of inequality techniques for stability analysis of time-delay systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(11): 6412-6440.

[3] ZHANG X M, WU M, SHE J H, et al. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays[J]. Automatica, 2005, 41(8): 1405-1412.

[4] SEURET A, GOUAISBAUT F. Wirtinger-based integral inequality: Application to time-delay systems[J]. Automatica, 2013, 49(9): 2860-2866.

[5] DAI L Y. Singular control systems[M]. Berlin: Springer, 2013.

[6] XU S Y, LAM J. Robust control and filtering of singular systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[7] CHAIBI N, TISSIR E H. Delay dependent robust stability of singular systems with time-varying delay[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2012, 10(3): 632-638.

[8] LU R Q, DAI X Z, DU W, et al. Robust H_∞ output feedback control for uncertain stochastic singular systems[C]//2008 Chinese Control and Decision Conference. Yantai, China. IEEE, 2008: 4344-4349.

[9] ZHUANG G M, MA Q, ZHANG B Y, et al. Admissibility and stabilization of stochastic singular Markovian jump systems with time delays[J]. Systems & Control Letters, 2018, 114: 1-10.

[10] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach[J]. Automatica, 1997, 33(4): 669-673.

[11] XU S Y, YANG C W. H_∞ state feedback control for discrete singular systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 45(7): 1405-1409.

[12] FENG Z Y, SHE J H, XU L. A brief review and insights into matrix inequalities for H_∞ static-output-feedback control and a local optimal solution[J]. International Journal of Systems Science, 2019, 50(12): 2292-2305.

[13] WANG B, ZHU Q X, LI S B. Stability analysis of switched singular stochastic linear systems[J]. International Journal of Control, 2020, 93(6): 1381-1387.

[14] XIE L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. International Journal of Control, 1996, 63(4): 741-750.

[15] BOUKAS E. Stochastic switching systems[M]. Boston: Birkhäuser, 2005.

[16] FENG Z G, SHI P. Two equivalent sets: Application to singular systems[J]. Automatica, 2017, 77: 198-205.

[17] KLEBANER F C. Introduction to stochastic calculus with applications[M]. London: Published by Imperial College Press and Distributed by World Scientific Publishing CO, 2005.

[18] OKSENDAL B. Stochastic differential equations: An introduction with applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995.

[19] XU S Y, VAN DOOREN P, STEFAN R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.

责任编辑: 赵新科