q-Heisenberg 代数的 Gröbner-Shirshov 基及结构性质*

张佳信，古丽沙旦木・玉奴斯†
(新疆大学 数学与系统科学学院，新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要： 设 n 是正整数, q 是非零的复数, $h_n(q)$ 是 q-Heisenberg 代数. 首先通过计算拟交换关系间的所有合成给出了 $h_n(q)$ 的极小 Gröbner-Shirshov 基, 并取关于此 Gröbner-Shirshov 基的不可约元素构造了 $h_n(q)$ 的 PBW 基, 然后证明了 $h_n(q)$ 的一些结构性质.

关键词： q-Heisenberg 代数; Gröbner-Shirshov 基; PBW 基; 可解多项式代数
DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316.2023.12.22.0002
中图分类号： O153.3　**文献标识码：** A　**文章编号：** 2096-7675(2024)05-0550-06
引文格式： 张佳信，古丽沙旦木·玉奴斯. q-Heisenberg 代数的 Gröbner-Shirshov 基及结构性质[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文)，2024，41(5)：550-555+561.
英文引文格式： ZHANG Jiaxin，GULISHADANMU Yunusi. Gröbner-Shirshov basis and structural properties of q-Heisenberg algebra[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)，2024，41(5)：550-555+561.

Gröbner-Shirshov Basis and Structural Properties of q-Heisenberg Algebra

ZHANG Jiaxin, GULISHADANMU Yunusi
(*School of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830017, China*)

Abstract： Let n be a positive integer, q a non-zero complex number, and $h_n(q)$ a q-Heisenberg algebra. In this paper, we first give the minimal Gröbner-Shirshov basis of $h_n(q)$ by calculating all the compositions between the skew commutator relations, and construct the PBW basis of $h_n(q)$ by taking the irreducible elements about this Gröbner-Shirshov basis. Then we prove some structural properties of $h_n(q)$.

Key words： q-Heisenberg algebra; Gröbner-Shirshov basis; PBW basis; solvable polynomial algebra

0　引 言

交换代数的 Gröbner 基理论是由 Buchberger[1] 引入的, 它为交换代数的约化问题提供了一个解决方案. 1978 年, Bergman[2] 通过证明 Diamond 引理发展了结合代数的 Gröbner 基理论, 其思想是 Buchberger 理论的推广, 在结合代数理论的各种领域都有许多应用. 值得一提的是 Shirshov[3] 比 Buchberger 更早引入了李代数的 Gröbner 基理论. 因此, 有些学者把 Gröbner 基理论称为 Gröbner-Shirshov 基理论. 现在 Gröbner-Shirshov 基理论已成为解决代数中约化问题、词问题、嵌入问题、PBW 定理、扩张问题等一系列问题的有力工具[4−5]. 此外 Gröbner-Shirshov 基理论在数学的其它分支和其它学科中也得到了广泛的应用[6].

Heisenberg 代数是一个幂零李代数, 有着深刻的物理背景. 近年来, 研究 Heisenberg 代数的结构和表示是李代数理论方向关注的问题之一, 许多学者对此有着广泛研究. 例如, 张海山[7]研究了 Heisenberg 李代数的自同构群, 姬广智[8]研究了 Heisenberg 李代数的 Rota-Baxter 算子, 周春莹[9]研究了 Heisenberg 李代数的拟自同构. Heisenberg 代数也是一个可解李代数, 在研究有限维李代数中起着重要的作用.

* 收稿日期：2023-12-22
基金项目：国家自然科学基金“群环的动态 Gröbner 基理论和钻石合成引理的研究”（12061068）.
作者简介：张佳信（1998—），男，硕士生，从事代数表示论的研究，E-mail：107552100599@stu.xju.edu.cn.
† 通讯作者：古丽沙旦木·玉奴斯（1982—），女，博士，副教授，主要从事代数表示论的研究，E-mail：gulshan157@163.com.

在本文中, 我们首先证明了 q-Heisenberg 代数的定义关系形成一个极小 Gröbner-Shirshov 基, 其确定了 q-Heisenberg 代数标准形式的 PBW 基 $\mathcal{B}$. 这也表明了 q-Heisenberg 代数是文献 [10] 意义下的可解多项式代数, 从而 q-Heisenberg 代数的(双侧, 单侧)理想和模有算法的 Gröbner 基理论. 最后我们具体给出了以上主要结果的几个应用.

1 预备知识

设 k 是一个域, X 是由一些字母组成的非空集合, 其指标集为正整数集, $\langle X\rangle$ 是包含 1 的自由半群, $k\langle X\rangle$ 是域 F 上由 X 生成的自由结合代数. 为了确定每个元素 $f\in k\langle X\rangle$ 的首项 $\bar{f}$, 我们在 $\langle X\rangle$ 中选取一个序 "$<$", 此序可以诱导出一个在自由结合代数 $k\langle X\rangle$ 上的序. 如果元素 $f\in k\langle X\rangle$ 的首项 $\bar{f}$ 的系数为 1, 则我们称 f 为首一元素. 如果 f 与 g 是 $k\langle X\rangle$ 的两个首一元素, 其首项分别为 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$, 那么 f 与 g 的合成有如下定义:

(i) 如果存在 $a,b\in\langle X\rangle$ 使得 $\bar{f}a=b\bar{g}=\omega$, 且 $\bar{f}$ 的长度大于 b 的长度, 则我们称 f, g 有交叉合成, 其定义为 $(f,g)_\omega=fa-bg$;

(ii) 如果存在 $a,b\in\langle X\rangle$ 使得 $\bar{f}=a\bar{g}b=\omega$, 则称 f, g 有包含合成, 其定义为 $(f,g)_\omega=f-agb$.

在上述定义的两种情况下均有 $\overline{(f,g)_\omega}<\omega$.

设 S 是 $k\langle X\rangle$ 中的一些关系的集合(本文假设 S 由首一元素组成). 用 (S) 表示由 S 在 $k\langle X\rangle$ 中生成的理想. 对任意的 $f,g\in k\langle X\rangle$, $\omega\in\langle X\rangle$, 我们在 $k\langle X\rangle$ 上定义关于子集 S 的同余关系

$$f\equiv g \ \mathrm{mod}(S;\omega)\Leftrightarrow f-g=\sum\alpha_i a_i s_i b_i,$$

其中 $\alpha_i\in k$, $a_i,b_i\in\langle X\rangle$, $s_i\in S$, 且 $\overline{a_i s_i b_i}<\omega$ 对任意的 i 都成立. 如果对任意的 f, g 只要合成 $(f,g)_\omega$ 有定义且 $(f,g)_\omega\equiv 0 \ \mathrm{mod}(S;\omega)$, 则称 S 对合成封闭. 此时 $f-g$ 对 S 平凡, 并记为 $f-g\equiv 0 \ \mathrm{mod}(S;\omega)$. 进而称 S 为 $k\langle X\rangle$ 的左理想 (S) 的一个 Gröbner-Shirshov 基, 或 S 为 $k\langle X\rangle$ 及商代数 $k\langle X\rangle/(S)$ 的一个 Gröbner-Shirshov 基. 如果 S 中没有包含合成, 则 S 称为极小 Gröbner-Shirshov 基(见文献 [11]).

引理 1[2] 设 k 是一个域, $A=k\langle X|S\rangle=k\langle X\rangle/\mathrm{Id}(S)$, 定义 $<$ 是 $\langle X\rangle$ 上的一个单项式序, 其中 $\mathrm{Id}(S)$ 是由 S 所生成的 $k\langle X\rangle$ 上的理想, 那么以下结论等价:

(1) S 是一个 Gröbner-Shirshov 基;

(2) 如果 $f\in\mathrm{Id}(S)$, 那么存在 s 使得 $\overline{f}=a\bar{s}b=\omega$, 其中 $s\in S$; $a,b\in\langle X\rangle$;

(3) $\mathrm{Irr}(S)=\{u\in\langle X\rangle|u\neq a\bar{s}b,\ s\in S;\ a,b\in\langle X\rangle\}$ 是代数 $A=k\langle X|S\rangle$ 的一组基.

2 主要结果

2.1 q-Heisenberg 代数的 Gröbner-Shirshov 基

本节主要讨论了 q-Heisenberg 代数的 Gröbner-Shirshov 基.

定义 1[12] 设 n 是正整数, q 是非零的复数, $h_n(q)$ 是由 $\{x_i,y_i,z_i\,|\,i=1,\cdots,n\}$ 生成的代数, 并满足以下关系:

$$\begin{aligned}
&x_ix_j=x_jx_i, y_iy_j=y_jy_i, z_jz_i=z_iz_j, && 1\le i<j\le n;\\
&x_iz_i=qz_ix_i, && 1\le i\le n;\\
&z_iy_i=qy_iz_i, && 1\le i\le n;\\
&x_iy_i=q^{-1}y_ix_i+z_i, && 1\le i\le n;\\
&x_iy_j=y_jx_i, x_iz_j=z_jx_i, y_iz_j=z_jy_i, && i\neq j.
\end{aligned}$$

我们称 $h_n(q)$ 为 q-Heisenberg 代数.

设 $W=\{x_i,y_i,z_i\,|\,i\in I(n)\}$, $K\langle W\rangle$ 表示由 W 生成的自由结合 K-代数, S 表示 $h_n(q)$ 在 $K\langle W\rangle$ 中的定义关系集合, 即 S 由以下拟交换关系构成

$$\begin{aligned}
&f_1=x_ix_j-x_jx_i, && 1\le i<j\le n;\\
&f_2=y_iy_j-y_jy_i, && 1\le i<j\le n;\\
&f_3=z_iz_j-z_jz_i, && 1\le i<j\le n;\\
&f_4=x_iz_i-qz_ix_i, && 1\le i\le n;
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&f_5 = y_i z_i - q^{-1} z_i y_i, && 1 \le i \le n;\\
&f_6 = x_i y_i - q^{-1} y_i x_i - z_i, && 1 \le i \le n;\\
&f_7 = x_i y_j - y_j x_i, && i \ne j;\\
&f_8 = x_i z_j - z_j x_i, && i \ne j;\\
&f_9 = y_i z_j - z_j y_i, && i \ne j.
\end{aligned}
$$

在 W 上定义一个单项式序:

$$
\begin{aligned}
&x_j < x_i \Longleftrightarrow, 1 \le i < j \le n;\\
&y_j < y_i \Longleftrightarrow, 1 \le i < j \le n;\\
&z_j < z_i \Longleftrightarrow, 1 \le i < j \le n;\\
&z_k < y_j < x_i \quad \text{对任意 } i,j,k, \text{ 且 } 1 \le i,j,k \le n.
\end{aligned}
$$

下面我们证明 S 是 $K\langle W\rangle$ 上关于某一单项式序的 Gröbner-Shirshov 基.

定理 1 令 $J=(S)$ 是由 S 生成的 q-Heisenberg 代数的理想. 关于上述单项式序, 集合 S 是理想 J 的 Gröbner-Shirshov 基, 即 q-Heisenberg 代数的定义关系形成理想 J 的 Gröbner-Shirshov 基.

证明 由于所有合成的计算是类似的, 本文具体给出 4 个 S 中元素确定的合成过程.

(1) $f_1 = x_i x_j - x_j x_i, f_1 = x_j x_k - x_k x_j, \omega = x_i x_j x_k, 1 \le i < j < k \le n.$

$$
\begin{aligned}
(f_1, f_1)_w &= f_1 x_k - x_i f_1\\
&= x_i x_j x_k - x_j x_i x_k - x_i x_j x_k + x_i x_k x_j\\
&= -x_j x_i x_k + x_i x_k x_j\\
&\equiv -x_j x_k x_i + x_k x_i x_j\\
&\equiv -x_k x_j x_i + x_k x_j x_i\\
&\equiv 0 \bmod(S, \omega).
\end{aligned}
$$

(2) $f_2 = y_i y_j - y_j y_i, f_9 = y_j z_i - z_i y_j, \omega = y_i y_j z_i, 1 \le i < j \le n.$

$$
\begin{aligned}
(f_2, f_9)_w &= f_2 z_i - y_i f_9\\
&= y_i y_j z_i - y_j y_i z_i - y_i y_j z_i + y_i z_i y_j\\
&= -y_j y_i z_i + y_i z_i y_j\\
&\equiv -q^{-1} y_j z_i y_i + q^{-1} z_i y_i y_j\\
&\equiv -q^{-1} z_i y_j y_i + q^{-1} z_i y_j y_i\\
&\equiv 0 \bmod(S, \omega).
\end{aligned}
$$

(3) $f_4 = x_i z_i - q z_i x_i, f_3 = z_i z_j - z_j z_i, \omega = x_i z_i z_j, 1 \le i < j \le n.$

$$
\begin{aligned}
(f_4, f_3)_w &= f_4 z_j - x_i f_3\\
&= x_i z_i z_j - q z_i x_i z_j - x_i z_i z_j + x_i z_j z_i\\
&= -q z_i x_i z_j + x_i z_j z_i\\
&\equiv -q z_i z_j x_i + z_j x_i z_i\\
&\equiv -q z_j z_i x_i + q z_j z_i x_i\\
&\equiv 0 \bmod(S, \omega).
\end{aligned}
$$

(4) $f_7=x_iy_j-y_jx_i, f_5=y_jz_j-q^{-1}z_jy_j, \omega=x_iy_jz_j, 1\le i<j\le n$.

$$\begin{aligned}(f_7,f_5)_w&=f_7z_j-x_if_5\\&=x_iy_jz_j-y_jx_iz_j-x_iy_jz_j+q^{-1}x_iz_jy_j\\&=-y_jx_iz_j+q^{-1}x_iz_jy_j\\&\equiv-y_jz_jx_i+q^{-1}z_jx_iy_j\\&\equiv-q^{-1}z_jy_jx_i+q^{-1}z_jy_jx_i\\&\equiv 0 \bmod(S,\omega).\end{aligned}$$

根据定义关系, 我们可以计算 19 个合成, 且这些合成都是平凡的, 定理得证.

由定理 1 和引理 1, 我们可以得到推论 1.

推论 1　q-Heisenberg 代数 $h_n(q)\cong K\langle W\rangle/J$ 的一组线性基或者 PBW 基为

$$\mathcal{B}=\{z_n^{t_n}\cdots z_2^{t_2}z_1^{t_1}y_n^{l_n}\cdots y_2^{l_2}y_1^{l_1}x_n^{k_n}\cdots x_2^{k_2}x_1^{k_1}\mid k_i,l_i,t_i\in\mathbb{N},i\in I(n)\}.$$

证明 根据 W 上的单项式序, 我们有

$$z_n<\cdots<z_2<z_1<y_n<\cdots<y_2<y_1<x_n<\cdots<x_2<x_1.$$

而理想 $J=(S)$ 的 Gröbner-Shirshov 基 S 包含以下首项的组合

$$\begin{array}{ll}x_ix_j,y_iy_j,z_iz_j, & 1\le i<j\le n;\\ x_iz_i, & 1\le i\le n;\\ y_iz_i, & 1\le i\le n;\\ x_iy_i, & 1\le i\le n;\\ x_iy_j,x_iz_j,y_iz_j, & i\ne j.\end{array}$$

根据经典的 Gröbner-Shirshov 基理论, $W(\text{mod } S)$ 的正规集如下:

$$\mathcal{B}=\{z_n^{t_n}\cdots z_2^{t_2}z_1^{t_1}y_n^{l_n}\cdots y_2^{l_2}y_1^{l_1}x_n^{k_n}\cdots x_2^{k_2}x_1^{k_1}\mid k_i,l_i,t_i\in\mathbb{N},i\in I(n)\}.$$

2.2　q-Heisenberg 代数的结构性质

我们从文献 [12-13] 开始回顾以下定义和符号.

设有限生成的 K-代数 $A=K[a_1,\cdots,a_n]$ 具有 PBW 基

$$\mathcal{B}=\{a^\alpha=a_n^{\alpha_n}\cdots a_1^{\alpha_1}\mid\alpha=(\alpha_n,\cdots,\alpha_1)\in\mathbb{N}^n\}$$

且 $<$ 是 $\mathcal{B}$ 上的全序, 则每个非零元素 $f\in A$ 都有唯一表达式

$$f=\lambda_ma^{\alpha(m)}+\cdots+\lambda_2a^{\alpha(2)}+\lambda_1a^{\alpha(1)}$$

使得 $a^{\alpha(m)}<\cdots<a^{\alpha(2)}<a^{\alpha(1)}$, 其中 $\lambda_j\in K^*$, $a^{\alpha(j)}=a_m^{\alpha_{mj}}\cdots a_2^{\alpha_{2j}}a_1^{\alpha_{1j}}\in\mathcal{B}$, $1\le j\le m\le n$. 由于 $\mathcal{B}$ 的元素通常被称为单项式, 如果 $f\ne0$, 则 f 的首项单项式被定义为 $\mathrm{LM}(f)=a^{\alpha(1)}$, f 的首项系数被定义为 $\mathrm{LC}(f)=\lambda_1$, f 的首项被定义为 $\mathrm{LT}(f)=\lambda_1a^{\alpha(1)}$.

定义 2　设 K-代数 $A=K[a_1,\cdots,a_n]$ 具有 PBW 基 $\mathcal{B}$. 如果 $<$ 是 $\mathcal{B}$ 上的全序, 且满足以下三个条件:

(1) $<$ 是良序(即 $\mathcal{B}$ 的每个非空子集都有一个极小元素);

(2) 对于 $a^\gamma,a^\alpha,a^\beta,a^\eta\in\mathcal{B}$, 如果 $a^\gamma\ne1$, $a^\beta\ne a^\gamma$, 且 $a^\gamma=\mathrm{LM}(a^\alpha a^\beta a^\eta)$, 则 $a^\gamma<a^\beta$ (从而 $1<a^\gamma$ 对所有的 $a^\gamma\ne0$);

(3) 对 $a^\gamma, a^\alpha, a^\beta, a^\eta \in \mathcal{B}$, 若 $a^\alpha < a^\beta$, $\mathrm{LM}(a^\gamma a^\alpha a^\eta) \neq 0$, 且 $\mathrm{LM}(a^\gamma a^\beta a^\eta) \notin \{0,1\}$, 则

$$\mathrm{LM}\left(a^\gamma a^\beta a^\eta\right) < \mathrm{LM}\left(a^\gamma a^\alpha a^\eta\right),$$

那么我们称 $<$ 是 $\mathcal{B}$ 上的单项式序.

定义 3 有限生成 K-代数 $A = K[a_1, \cdots, a_n]$ 称为可解多项式代数, 如果 A 具有 PBW 基

$$\mathcal{B} = \{a^\alpha = a_n^{\alpha_n} \cdots a_1^{\alpha_1} \mid \alpha = (\alpha_n, \cdots, \alpha_1) \in \mathbb{N}^n\}$$

和 $\mathcal{B}$ 上的一个单项式序 $<$, 使得对于某个 $\lambda_{ij} \in K^*$ 且 $f_{ij} \in A$ 有

$$a_i a_j = \lambda_{ij} a_j a_i + f_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

如果 $f_{ij} \neq 0$, 则 $\mathrm{LM}(f_{ij}) < a_j a_i$.

定理 2 设 $h_n(q)$ 是域 K 上的 q-Heisenberg 代数. 则 $h_n(q)$ 是定义 3 意义下的可解多项式代数.

证明 设 $W = \{x_i, y_i, z_i \mid i \in I(n)\}$, $I(n) = \{i \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$, 且 $R_1, R_2, \cdots, R_9$, 表示 A 的 $3n$ 个生成元所满足的关系, 即

$$\begin{aligned}
&R_1: x_i x_j - x_j x_i,\\
&R_2: y_i y_j - y_j y_i,\\
&R_3: z_i z_j - z_j z_i,\\
&R_4: x_i z_i - q z_i x_i,\\
&R_5: z_i y_i - q y_i z_i,\\
&R_6: x_i y_i - q^{-1} y_i x_i - z_i,\\
&R_7: x_i y_j - y_j x_i,\\
&R_8: x_i z_j - z_j x_i,\\
&R_9: y_i z_j - z_j y_i.
\end{aligned}$$

根据推论 1, q-Heisenberg 代数 $h_n(q)$ 具有 PBW 基

$$\mathcal{B} = \{z_n^{t_n} \cdots z_2^{t_2} z_1^{t_1} y_n^{l_n} \cdots y_2^{l_2} y_1^{l_1} x_n^{k_n} \cdots x_2^{k_2} x_1^{k_1} \mid k_i, l_i, t_i \in \mathbb{N}, i \in I(n)\}.$$

关于 $\mathcal{B}$ 上的单项式序 $<$, 我们有

$$z_n < \cdots < z_2 < z_1 < y_n < \cdots < y_2 < y_1 < x_n < \cdots < x_2 < x_1.$$

对于此序, $h_n(q)$ 的生成元所满足的关系 $R_1, R_2, \cdots, R_9$ 具有定义 3 所要求的性质. 故 $h_n(q)$ 是可解多项式代数.

命题 1[14] 设 $K\langle X\rangle = K\langle X_1, X_2, \cdots, X_n\rangle$ 是由生成元集合 $X = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 生成的自由 K-代数, $<$ 是 $K\langle X\rangle$ 上的单项式序. 假设 $\mathcal{G}$ 是理想 $I = \langle \mathcal{G}\rangle$ 关于 $<$ 的 Gröbner-Shirshov 基, 使得首项单项式集合由下式给出

$$\mathrm{LM}(\mathcal{G}) = \{X_j X_i \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

或

$$\mathrm{LM}(\mathcal{G}) = \{X_i X_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

那么对代数 $A = K\langle X\rangle / I$, 由文献 [15], 可知以下结论成立:

(i) Gelfand-Kirillov 维数 dimensionGK. $\dim A = n$;

(ii) 如果 $\mathcal{G}$ 由关于 $K\langle X\rangle$ 的某个 N 阶的齐次元素组成, 那么全局同调维数 GL. $\dim A = n$. 如果 $\mathcal{G}$ 不由齐次元素组成, 那么 GL. $\dim A \leq n$;

(iii) 如果 $\mathcal{G}$ 由关于 $K\langle X\rangle$ 的 $\mathcal{N}$-阶的二次齐次元素组成, 其中每个 $X_i (1 \leq i \leq n)$ 被赋予次数 1, 那么 A 是一个齐次的二次 Koszul 代数. 否则, A 不是一个齐次的二次 Koszul 代数.

根据命题 1, 我们得到定理 3.

定理 3　q-Heisenberg 代数 $h_n(q)$ 具有以下结构性质:

(i) Gelfand-Kirillov 维数 $\mathrm{GK.dim}\, h_n(q) = 3n$;

(ii) 全局同调维数 $\mathrm{GL.dim}\, h_n(q) \leq 3n$;

(iii) $h_n(q)$ 不是一个齐次的二次 Koszul 代数.

证明　集合 W 关于单项式序 $<$ 有

$$z_n < \cdots < z_2 < z_1 < y_n < \cdots < y_2 < y_1 < x_n < \cdots < x_2 < x_1.$$

因此, 理想 $J=(S)$ 的 Gröbner-Shirshov 基 S 的所有首项字母如下建立:

$$\begin{aligned}
&x_i x_j \Longleftrightarrow x_j < x_i, 1 \leq i < j \leq n,\\
&x_i y_i \Longleftrightarrow y_i < x_i, 1 \leq i \leq n,\\
&x_i z_i \Longleftrightarrow z_i < x_i, 1 \leq i \leq n,\\
&y_i z_i \Longleftrightarrow z_i < y_i, 1 \leq i < j \leq n,\\
&x_i y_j \Longleftrightarrow y_j < x_i, 1 \leq i < j \leq n,\\
&x_i z_j \Longleftrightarrow z_j < x_i, 1 \leq i < j \leq n,\\
&y_i z_j \Longleftrightarrow z_j < y_i, 1 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

这意味着 $h_n(q)$ 满足命题 1 的条件, 由定理 1 和命题 1 可证明 (i).

注意 $h_n(q)$ 是一个由非齐次 Gröbner 基定义的 N-分次代数. 由命题 1 (ii) 和 (iii) 我们可以证明 (ii) 和 (iii).

此外, 由定理 2 我们已经知道 q-Heisenberg 代数 $h_n(q) \cong K\langle W\rangle/J$ 是可解多项式代数. 因此, 可解多项式代数 A 的每一个理想和自由(左) A-模的每一个子模关于给定的单项式序有一个有限的 Gröbner 基. 特别的, 对于自由(左)模的单侧理想和子模, 存在非交换 Buchberger 算法, 该算法如今已在计算机代数系统 Plural 中成功实现[16]. 在这一点上, 我们给予定理 1 对 $h_n(q)$ 及其模的几个应用. 在下文中, $h_n(q)$ 上的模指左 $h_n(q)$ 模.

定理 4　对于 q-Heisenberg 代数 $h_n(q)$ 有以下结论成立:

(i) $h_n(q)$ 是 Noetherian 整环;

(ii) 设 M 是有限生成的 $h_n(q)$ 模, 那么可以构造 M 的一个有限自由分解, 并且 M 的投射维数可以具体计算出来;

(iii) 设 M 是一个有限生成的分次 $h_n(q)$-模(注意 $h_n(q)$ 是一个 N-分次代数, 其中每个生成元的度为 1), 那么可以构造 M 的最小有限分次自由分解.

证明　(i) $h_n(q)$ 没有零因子, 因为 $\mathrm{LM}(fg) = \mathrm{LM}(\mathrm{LM}(f)\mathrm{LM}(g)) \neq 0$, 对于所有非零的 $f, g \in h_n(q)$, 又因为每个非零的单侧理想有有限的 Gröbner 基, 可以得到 $h_n(q)$ 是 Noetherian 整环.

(ii) 由文献 [17] 中定理 3.2.2 可得, 一个可解多项式代数在其单项式序下, 每一个有限生成 A-模 M 都有有限自由分解, 且由算法可具体计算出 M 的投射维数.

(iii) 由文献 [17] 可以得到, 一个有限生成的分次 A-模都可由多个 K-子空间 M_q 构成, 由此我们可以构造 M 的最小有限分次自由分解.

参考文献:

[1] BUCHBERGER B. An algorithm for finding a basis for the residue class ring of a zero-dimensional ideal[D]. Austria: University of Innsbruck, 1965.

[2] BERGMAN G M. The diamond lemma for ring theory[J]. Advances in Mathematics, 1978, 29(2): 178-218.

[3] SHIRSHOV A I. Some algorithmic problems for Lie algebras[M]//BOKUT L, SHESTAKOV I, LATYSHEV V, et al. Selected works of Shirshov AI, Basel: Birkhäuser Basel, 2009: 125-130.

[4] BOKUT′L A. Embeddings into simple associative algebras[J]. Algebra and Logic, 1976, 15(2): 73-90.

[5] KANG S J, LEE K H. Gröbner-Shirshov bases for representation theory[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2000, 37: 55-72.

(下转第 561 页)