弱 Gorenstein 分次模*

宋彦辉，郭 婷

(兰州信息科技学院 通识教育学院，甘肃 兰州 730300)

摘 要： 设 R 是分次环, 引入弱 Gorenstein gr-投射, gr-内射和 gr-平坦模, 给出了弱 Gorenstein gr-投射模的等价刻画. 证明了在分次 n-Gorenstein 环上, 弱 Gorenstein gr-投射 R-模是 Gorenstein gr-投射的. 同时, 证明了如果任意分次内射 R-模具有有限的分次平坦维数, 那么 M 是弱 Gorenstein gr-平坦 R-模当且仅当 M 是 Gorenstein gr-平坦模.

关键词： 分次投射模; 弱 Gorenstein gr-投射模; 分次平坦维数; 弱 Gorenstein gr-平坦模

DOI： 10.13568/j.cnki.651094.651316.2024.01.30.0001

中图分类号： O154.2 **文献标识码：** A **文章编号：** 2096-7675(2024)05-0556-06

引文格式： 宋彦辉，郭婷. 弱 Gorenstein 分次模[J]. 新疆大学学报(自然科学版中英文)，2024，41(5)：556-561.

英文引文格式： SONG Yanhui，GUO Ting. Weak Gorenstein graded modules[J]. Journal of Xinjiang University(Natural Science Edition in Chinese and English)，2024，41(5)：556-561.

Weak Gorenstein Graded Modules

SONG Yanhui, GUO Ting

(*School of General Education, Lanzhou University of Information Science and Technology, Lanzhou Gansu 730300, China*)

Abstract： Let R be a graded ring. The concepts of weak Gorenstein gr-projective modules, gr-injective modules and gr-flat modules are introduced, and some homological characterizations of weak Gorenstein gr-projective modules are given. It is shown that a weak Gorenstein gr-projective module is a Gorenstein gr-projective R-module over a graded n-Gorenstein ring R. Moreover, it is proved that: if any graded injective R-module has a finite graded flat dimension, then a graded module M is weak Gorenstein gr-flat if and only if M is Gorenstein gr-flat.

Key words： gr-projective module; weak Gorenstein gr-projective module; graded flat dimension; weak Gorenstein gr-flat module

0 引言及预备知识

自 20 世纪 60 年代以来, Gorenstein 同调代数受到了学者们的广泛关注. 1995 年, Enochs 和 Jenda[1] 引入了 Gorenstein 内射模和投射模的概念; 进一步, Enochs 等[2]定义了 Gorenstein 平坦模. 随后, 众多学者对 Gorenstein 投射、内射和平坦模进行了深入的研究和推广[3−7].

众所周知, 分次环和分次模是代数学研究的经典课题, 分次环的同调理论在代数几何中有着非常重要的应用[8−9]. 因此, 人们希望能建立分次环上的 Gorenstein 同调理论, 于是许多学者对分次环的相对同调理论进行了广泛研究[10−12]. 其中, Asensio 等[10−11]引入了 Gorenstein gr-投射、gr-内射和 gr-平坦模的概念, 并得到这些模类在分次与未分次情形之间的关系; 随后, Mao[13] 引入并研究了强 Gorenstein 分次模.

受以上研究的启发, 本文引入了弱 Gorenstein gr-投射、gr-内射和 gr-平坦模, 给出了其等价刻画, 并且证明了在分次 n-Gorenstein 环上, 分次模 M 是 Gorenstein gr-投射模当且仅当 M 是弱 Gorenstein gr-投射的. 证明了如果分次内射 R-模的分次平坦维数有限, 那么任意弱 Gorenstein gr-平坦 R-模是 Gorenstein gr-平坦的; 最后, 证明了在左分次凝聚环上, 弱 Gorenstein FP-gr-内射 R-模的分次特征模是弱 Gorenstein gr-平坦右 R-模.

本文中 R 表示具有单位元的结合环, 所有涉及的模均是酉模, 所有 R-模均指左 R-模. 未解释的标记和概念参阅文献 [8-9]. 我们首先给出分次环与分次模的基本知识.

设 R 是环, G 是一个含有单位元的乘法群. 若 $R=\oplus_{\sigma\in G}R_\sigma$, 其中 R_σ 是 R 的加法子群, 对任意 $\sigma,\tau\in G$, 满足 $R_\sigma R_\tau\subseteq R_{\sigma\tau}$, 则称 R 是 G-分次环, 简称分次环. 设 M 是 R-模, 如果 $M=\oplus_{\sigma\in G}M_\sigma$, 其中 M_σ 是 M 的加法子群,

* **收稿日期：** 2024-01-30
基金项目： 甘肃省高校教师创新基金“Gorenstein 弱同调模及复形的研究”（2023B-387）.
作者简介： 宋彦辉（1994—），男，硕士，讲师，主要从事环的同调理论研究，E-mail：yh_song94@163.com.

对任意 $\sigma,\tau \in G$, 都有 $R_\sigma M_\tau \subseteq M_{\sigma\tau}$, 那么称 M 是 G-分次模, 简称分次 R-模. 设 M,N 是分次 R-模. 记 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(M,N) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M,N) | f(M_\sigma) \subseteq N_\sigma, \sigma \in G\}$, 即 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(M,N)$ 是分次 R-模范畴中 M 到 N 的所有态射构成的集合. 对固定的 $\tau \in G$, 称一个 R-线性映射 $f: M \to N$ 是次数为 τ 的分次态射，若对 $\forall \sigma \in G$ 有 $f(M_\sigma) \subseteq N_{\sigma\tau}$, 则次数为 τ 的所有分次态射的集合 $\mathrm{HOM}_R(M,N)_\tau$ 构成了 $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ 的加法子群, 且 $\mathrm{HOM}_R(M,N) = \oplus_{\tau\in G}\mathrm{HOM}_R(M,N)_\tau$ 是一个 G-分次阿贝尔群. 用 $\mathrm{Ext}^i_{R-\mathrm{gr}}(M,N)$ 和 $\mathrm{EXT}^i_R(M,N)$ 分别表示 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(M,N)$ 和 $\mathrm{HOM}_R(M,N)$ 的右导出函子. 令 R-gr 和 gr-R 分别表示分次左 R-模和分次右 R-模的范畴, 若 $M \in R$-gr, 则 M 的分次特征模为 $M^+ = \mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 由文献 [12] 知 $M^+ = \oplus_{\sigma\in G}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M_{\sigma^{-1}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

设 M 是分次右 R-模, N 是分次左 R-模. 令 $M \otimes_R N = \oplus_{\sigma\in G}(M\otimes_R N)_\sigma$, 其中 $(M\otimes_R N)_\sigma$ 是由 $x\otimes y$ 生成的加法子群, $x \in M_\alpha, y \in N_\beta$, 且 $\alpha\beta = \sigma$, 则 $M\otimes_R N$ 是一个阿贝尔群, 称为 M 与 N 的张量积, 用 $\mathrm{Tor}_i(M,N)$ 表示分次张量积的左导出函子. 分次 R-模 M 的分次投射、分次内射和分次平坦维数分别表示为 gr-pd(M), gr-id(M), gr-fd(M).

下面给出本文中所需要的一些基本概念.

定义 1[10] 称分次 R-模 M 是 Gorenstein gr-投射模, 若存在一个分次投射 R-模的正合列

$$\mathbb{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$, 并且对任意分次投射 R-模 P, $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(\mathbb{P}, P)$ 是正合的.

定义 2[11] 称分次 R-模 M 是 Gorenstein gr-平坦模, 若存在一个分次平坦 R-模的正合列

$$\mathbb{F} = \cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(F^0 \to F^1)$, 并且对任意分次内射右 R-模 I, $I \otimes_R \mathbb{F}$ 是正合的.

1 弱 Gorenstein gr-投射和 gr-内射模

定义 3 称分次 R-模 M 是弱 Gorenstein gr-投射模, 如果存在分次投射 R-模的正合列

$$\eta: \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$. 对偶的可定义弱 Gorenstein gr-内射模.

显然, Gorenstein gr-投射模 (gr-内射模) 是弱 Gorenstein gr-投射模 (gr-内射模), 且弱 Gorenstein gr-投射模对直和封闭, 弱 Gorenstein gr-内射模对直积封闭. 上述定义的正合列 η 中, 所有核、余核及像都是弱 Gorenstein gr-投射模. 由定义 3 我们给出弱 Gorenstein gr-投射模的等价刻画.

引理 1 设 R 是分次环, M 是分次左 R-模. 则以下结论等价:

(1) M 是弱 Gorenstein gr-投射模;

(2) 存在分次 R-模的正合列 $0 \to M \to P^0 \to P^1 \to \cdots$, 其中每个 P^i 是分次投射模;

(3) 存在分次 R-模的正合列 $0 \to M \to P \to N \to 0$, 其中 P 是分次投射模, N 是弱 Gorenstein gr-投射模.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2), (1) $\Rightarrow$ (3) 由定义 3 显然成立.

(3) $\Rightarrow$ (2) 设存在分次 R-模的正合列 $\alpha: 0 \to M \to P \to N \to 0$, 其中 P 是分次投射模, N 是弱 Gorenstein gr-投射模, 则有正合列 $\beta: 0 \to N \to P^{0'} \to P^{1'} \to \cdots$, 其中每个 $P^{i'}$ 是分次投射模. 连接 α 和 β 可得正合列 $0 \to M \to P \to P^{0'} \to P^{1'} \to \cdots$, 其中 $P, P^{i'}$ 是分次投射模.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设分次 R-模 M 的一个分次投射分解为 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$, 再由条件 (2) 可得分次 R-模的正合列 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots$, 其中 $M \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$, 因此 M 是弱 Gorenstein gr-投射模.

设 R 是分次环, 由文献 [10], 称 R 是分次 n-Gorenstein 环, 如果 R 是双边分次诺特环, 且 gr-id$({}_RR) \le n$, gr-id$(R_R) \le n$. 下面给出当 R 是分次 n-Gorenstein 环时, 弱 Gorenstein gr-投射模是 Gorenstein gr-投射的.

命题 1 设 R 是分次环. 若 M 是 Gorenstein gr-投射 R-模, 则 M 是弱 Gorenstein gr-投射模. 如果 R 是分次 n-Gorenstein 环, 那么 M 是 Gorenstein gr-投射 R-模当且仅当 M 是弱 Gorenstein gr-投射模.

证明 注意到 Gorenstein gr-投射模是弱 Gorenstein gr-投射的. 故只需证明如果 R 是分次 n-Gorenstein 环, 那么任意弱 Gorenstein gr-投射模是 Gorenstein gr-投射模. 设 M 是弱 Gorenstein gr-投射模，则存在分次投

射 R-模的正合列 $\eta:\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$, 其中 $M\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$. 下证对任意分次投射 R-模 Q, $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(\eta,Q)$ 是正合的.

我们不妨先证明如果 N 是分次 R-模, 且 gr-id$(N)=n<\infty$, 有 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(\eta,N)$ 是正合的. 对 n 进行数学归纳, 当 $n=0$ 时, 显然成立. 令 $n\geq 1$, 假设结论对 $n-1$ 成立. 因为 gr-id$(N)=n<\infty$, 则存在正合列 $0\to N\to E\to L\to 0$, 其中 E 是分次内射模, 且 gr-id$(N)\leq n-1$. 故可得复形的正合列 $0\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(\eta,N)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(\eta,E)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(\eta,L)\to 0$. 显然 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(\eta,E)$ 是正合的, 注意到 R 是分次 n-Gorenstein 环, 由文献 [10] 的定理 2.8 可知 gr-id$(Q)\leq n$, 因此 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(\eta,Q)$ 正合, 即 M 是 Gorenstein gr-投射模.

命题 2 设 R 是分次诺特环, 且任意分次内射 R-模的分次平坦维数有限. 如果 M 是弱 Gorenstein gr-内射 R-模, 那么 M^+ 是 Gorenstein gr-平坦右 R-模.

证明 设 M 是弱 Gorenstein gr-内射模, 则存在分次内射 R-模的正合列

$$\mathbb{E}:\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots,$$

其中 $M\cong\mathrm{Ker}(E^0\to E^1)$. 由文献 [12] 的引理 2.1 可得正合列

$$\mathbb{E}^+:\cdots\to(E^1)^+\to(E^0)^+\to(E_0)^+\to(E_1)^+\to\cdots,$$

其中 $M^+\cong\mathrm{Ker}((E_0)^+\to(E_1)^+)$. 由条件知 R 是分次诺特环, 再由文献 [12] 的定理 3.8 可得每个 $(E^i)^+,(E_i)^+$ 是分次平坦右 R-模. 下证对于任意分次内射 R-模 I, $\mathbb{E}^+\otimes_R I$ 是正合的.

不妨先证明: 对于任意分次 R-模 N, 若 gr-fd$(N)=m<\infty$, 则 $\mathbb{E}^+\otimes_R N$ 正合. 对 m 进行数学归纳, 当 $m=0$ 时, 显然成立. 令 $m\geq 1$, 假设结论对 $m-1$ 成立. 因为 gr-fd$(N)=m<\infty$, 所以存在正合列 $0\to F_1\to F\to N\to 0$, 其中 F 是分次平坦模, 且 gr-fd$(F_1)\leq m-1$. 因此可得正合列

$$0\to\mathbb{E}^+\otimes_R F_1\to\mathbb{E}^+\otimes_R F\to\mathbb{E}^+\otimes_R N\to 0.$$

注意到 $\mathbb{E}^+\otimes_R F$ 正合, 且由归纳假设知 $\mathbb{E}^+\otimes_R F_1$ 正合, 所以 $\mathbb{E}^+\otimes_R N$ 是正合的. 由条件知任意分次内射 R-模的分次平坦维数有限, 则 gr-fd$(I)<\infty$. 因此 $\mathbb{E}^+\otimes_R I$ 是正合的, 即 M^+ 是 Gorenstein gr-平坦右 R-模.

设 R 是分次环, 令 gr-PD$(R)=\sup\{$ gr-pd$(M)\mid M$ 是分次 R-模 $\}$. 当 gr-PD$(R)<\infty$ 时, 弱 Gorenstein gr-投射 R-模是分次投射的.

定理 1 设 R 是分次环. 若 M 是分次投射 R-模, 则 M 是弱 Gorenstein gr-投射模. 如果 gr-PD$(R)<\infty$, 那么 M 是分次投射模当且仅当 M 是弱 Gorenstein gr-投射模.

证明 注意到分次投射 R-模是弱 Gorenstein gr-投射的, 故只需证明 gr-PD$(R)<\infty$ 时, 任意弱 Gorenstein gr-投射模是分次投射的. 设 gr-PD$(R)=n<\infty$. 若 $n=0$ 时, 显然成立. 令 $n\geq 1$, 设 M 是弱 Gorenstein gr-投射模, 则由引理 1 可知, 存在正合列 $0\to M\to P^0\to P^1\to\cdots$, 其中每个 P^i 是分次投射模. 设 $L=\mathrm{Im}(P^{n-1}\to P^n)$, 则有正合列 $0\to M\to P^0\to\cdots\to P^{n-1}\to L\to 0$, 由于 gr-PD$(R)<\infty$, 所以 gr-pd$(L)\leq n$, 因此 M 是分次投射模.

关于弱 Gorenstein gr-内射模的相关结论可对偶的给出.

2 弱 Gorenstein gr-平坦模

定义 4 称分次 R-模 M 是弱 Gorenstein gr-平坦模, 如果存在分次平坦 R-模的正合列

$$\varepsilon:\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(F^0\to F^1)$.

显然, Gorenstein gr-平坦模是弱 Gorenstein gr-平坦模, 弱 Gorenstein gr-投射模是弱 Gorenstein gr-平坦模, 且弱 Gorenstein gr-平坦模对直和封闭. 上述定义的正合列 ε 中, 所有核、余核及像都是弱 Gorenstein gr-平坦模. 下面我们给出弱 Gorenstein gr-平坦模的等价刻画.

引理 2 设 R 是分次环, M 是分次 R-模. 则以下结论等价:

(1) M 是弱 Gorenstein gr-平坦模;

(2) 存在分次 R-模的正合列 $0\to M\to F^0\to F^1\to\cdots$, 其中每个 F^i 是分次平坦模;

(3) 存在分次 R-模的正合列 $0\to M\to F\to H\to 0$, 其中 F 是分次平坦模, H 是弱 Gorenstein gr-平坦模.

证明 类似引理 1 的证明即可得证.

命题 3 设 R 是分次环, 令 $0\to N\to M\to F\to 0$ 是分次 R-模的正合列. 如果 N 是弱 Gorenstein gr-平坦模, F 是分次平坦模, 那么 M 是弱 Gorenstein gr-平坦模.

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & F' \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] & 0 \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

图 1　推出图

证明 因为 N 是弱 Gorenstein gr-平坦模, 则存在分次 R-模的正合列 $0\to N\to F'\to L\to 0$, 其中 F' 是分次平坦模, L 是弱 Gorenstein gr-平坦模. 如图 1 所示, 在正合列 $0\to F'\to D\to F\to 0$ 中, 由于 F',F 是分次平坦模, 所以 D 是分次平坦模. 在正合列 $0\to M\to D\to L\to 0$ 中, 由于 D 是分次平坦模, 再由引理 2 可知 M 是弱 Gorenstein gr-平坦模.

命题 4 设 R 是左分次凝聚环, 则弱 Gorenstein gr-平坦右 R-模的类对分次直积封闭.

证明 注意到 R 是左分次凝聚环, 则分次平坦右 R-模的分次直积是分次平坦的, 再由定义 4 可得.

定理 2 设 R 是分次环, 且任意分次内射右 R-模具有有限的分次平坦维数, 则任意弱 Gorenstein gr-平坦 R-模是 Gorenstein gr-平坦的.

证明 设 M 是弱 Gorenstein gr-平坦 R-模, 则存在分次平坦 R-模的正合列

$$\varepsilon:\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots,$$

其中 $M\cong \mathrm{Ker}(F^0\to F^1)$. 下证对任意分次内射右 R-模 I, $I\otimes_R\varepsilon$ 是正合的. 由条件知 $\text{gr-fd}(I)=n<\infty$, 对 n 进行数学归纳, 类似命题 2 的证明容易得到 $I\otimes_R\varepsilon$ 是正合的. 因此, M 是 Gorenstein gr-平坦模.

由文献 [12] 知, 称分次 R-模是 FP-gr-内射模, 如果对任意有限表示分次 R-模 N, 有 $\mathrm{EXT}^1_R(N,M)=0$. 我们称分次 R-模是弱 Gorenstein FP-gr-内射模, 如果存在正合列 $\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots$, 其中 E_i,E^i 是 FP-gr-内射模, 使得 $M\cong\mathrm{Ker}(E^0\to E^1)$. 由文献 [11] 可知, 称 R 是分次 n-FC 环, 如果 R 是双边分次凝聚环, 且 $\text{FP-gr-id}({}_RR)\le n$, $\text{FP-gr-id}(R_R)\le n$. 以下通过弱 Gorenstein gr-平坦模刻画分次 FC 环.

定理 3 设 R 是左分次凝聚环. 若 M 是弱 Gorenstein FP-gr-内射 R-模, 则 M^+ 是弱 Gorenstein gr-平坦右 R-模.

证明 设 M 是弱 Gorenstein FP-gr-内射模, 则存在 FP-分次内射模的正合列

$$\cdots\to E_1\to E_0\to E^0\to E^1\to\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}(E^0\to E^1)$. 从而有正合列 $\cdots\to(E^1)^+\to(E^0)^+\to(E_0)^+\to(E_1)^+\to\cdots$, 使得 $M\cong\mathrm{CoKer}((E^1)^+\to(E^0)^+)$, 且由文献 [12] 的定理 3.7 可知 $(E^i)^+,(E_i)^+$ 是分次平坦模右 R-模. 因此, M^+ 是弱 Gorenstein gr-平坦右 R-模.

命题 5 设 R 是分次交换环, M 是弱 Gorenstein gr-平坦 R-模. 则以下结论成立:

(1) 对任意分次平坦 R-模 Q, $M\otimes_RQ$ 是弱 Gorenstein gr-平坦模;

(2) 对任意分次内射 R-模 E, $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(M,E)$ 是弱 Gorenstein gr-内射模;

(3) 对任意有限生成分次投射 R-模 P, $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,M)$ 是弱 Gorenstein gr-平坦模.

证明 (1) 设 R 是分次交换环, F 和 Q 是分次平坦 R-模. 考虑正合列 $0\to N\to H\to L\to 0$, 由于 Q 是分次平坦 R-模, 则有正合列 $0\to Q\otimes_RN\to Q\otimes_RH\to Q\otimes_RL\to 0$. 考虑交换图图 2.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F\otimes_R(Q\otimes_RN) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & F\otimes_R(Q\otimes_RH) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & F\otimes_R(Q\otimes_RL) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & (F\otimes_RQ)\otimes_RN \arrow[r] & (F\otimes_RQ)\otimes_RH \arrow[r] & (F\otimes_RQ)\otimes_RL \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2　交换图

由于 F 是分次平坦 R-模, 所以图 2 中的第一行正合, 从而第二行也正合, 由此得到 $F\otimes_RQ$ 是分次平坦 R-模.

因为 M 是弱 Gorenstein gr-平坦模, 则存在分次平坦模的正合列 $\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots$, 使得 $M\cong\mathrm{Ker}(F^0\to F^1)$. 注意到 $\cdots\to F_1\otimes_RQ\to F_0\otimes_RQ\to F^0\otimes_RQ\to F^1\otimes_RQ\to\cdots$ 是正合的, 其中 $M\otimes_RQ\cong\mathrm{Ker}(F^0\otimes_RQ\to F^1\otimes_RQ)$, 且每个 $F_i\otimes_RQ$ 和 $F^i\otimes_RQ$ 都是分次平坦模, 因此 $M\otimes_RQ$ 是弱 Gorenstein gr-平坦模.

(2) 设 F 是分次平坦 R-模, E 是分次内射 R-模. 考虑正合列 $0\to N\to H\to L\to 0$, 由于 R 是分次交换环, F 是分次平坦 R-模, 则有正合列 $0\to N\otimes_R F\to H\otimes_R F\to L\otimes_R F\to 0$. 由文献 [8] 的命题 I.2.14, 考虑交换图图 3.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(L\otimes_R F,E) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(H\otimes_R F,E) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(N\otimes_R F,E) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(L,\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F,E)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(H,\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F,E)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(N,\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F,E)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 3 交换图

由于 E 是分次内射 R-模, 所以图 3 中第一行正合, 从而第二行也正合, 因此 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F,E)$ 是分次内射 R-模.

因为 M 是弱 Gorenstein gr-平坦模, 则存在分次平坦模的正合列 $\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots$, 使得 $M\cong\mathrm{Ker}(F^0\to F^1)$. 注意到对任意分次内射 R-模 E, 有正合列

$$\cdots\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F^1,E)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F^0,E)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F_0,E)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F_1,E)\to\cdots$$

是正合的, 其中 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F_i,E)$ 和 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F^i,E)$ 都是分次内射模, 且

$$\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(M,E)\cong\mathrm{CoKer}(\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F^1,E)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(F^0,E)).$$

因此 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(M,E)$ 是弱 Gorenstein gr-内射模.

(3) 设 P 是有限生成分次投射 R-模, F 是分次平坦 R-模. 考虑正合列 $0\to N\to H\to L\to 0$, 因为 R 是分次交换环, F 是分次平坦 R-模, 所以有正合列 $0\to F\otimes_R N\to F\otimes_R H\to F\otimes_R L\to 0$. 由于 P 是有限生成分次投射 R-模, 再由文献 [8] 的命题 I.2.16 可得交换图图 4.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F\otimes_R N) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F\otimes_R H) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F\otimes_R L) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F)\otimes_R N \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F)\otimes_R H \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F)\otimes_R L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

图 4 交换图

因为图 4 中第一行正合, 从而第二行也正合, 因此 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F)$ 是分次平坦 R-模.

因为 M 是弱 Gorenstein gr-平坦模, 则存在分次平坦模的正合列 $\cdots\to F_1\to F_0\to F^0\to F^1\to\cdots$, 使得 $M\cong\mathrm{Ker}(F^0\to F^1)$. 注意到 P 是有限生成分次投射 R-模, 则有正合列

$$\cdots\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F_1)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F_0)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F^0)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F^1)\to\cdots,$$

其中 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F_i)$ 和 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F^i)$ 都是分次平坦模, 且

$$\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,M)\cong\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F^0)\to\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,F^1)).$$

因此 $\mathrm{Hom}_{R-\mathrm{gr}}(P,M)$ 是弱 Gorenstein gr-平坦模.

设 R 是分次环, 令 $\mathrm{gr\text{-}wD}(R)=\sup\{\,\mathrm{gr\text{-}fd}(M)\mid M$ 是分次 R-模 $\}$. 当 $\mathrm{gr\text{-}wD}(R)<\infty$ 时, 弱 Gorenstein gr-平坦 R-模是分次平坦的.

命题 6 设 R 是分次环. 若 M 是分次平坦 R-模, 则 M 是弱 Gorenstein gr-平坦 R-模. 如果 $\mathrm{gr\text{-}wD}(R)<\infty$, 那么 M 是分次平坦 R-模当且仅当 M 是弱 Gorenstein gr-平坦模.

证明 类似定理 1 的证明可得.

参考文献:

[1] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(1): 611-633.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein flat modules[J]. Journal of Nanjing University(Mathematical Biquarterly), 1993, 10(1): 1-9.

[3] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(1/2/3): 167-193.

[4] BENNIS D, MAHDOU N. Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 210(2): 437-445.

[5] GAO Z H. Weak Gorenstein projective, injective and flat modules[J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2013, 12(2): 1-15.

[6] ASEFA D. Gorenstein-projective modules over morita rings[J]. Algebra Colloquium, 2021, 28(3): 521-532.

[7] LI S, MARCZINZIK R, ZHANG S H. Gorenstein projective dimensions of modules over minimal Auslander-Gorenstein algebras[J]. Algebra Colloquium, 2021, 28(2): 337-350.

[8] NASTASESCU C, VAN OYSTAEVEN F. Graded ring theory[M]. Amsterdam: North-Holland, 1982.

[9] NASTASESCU C, VAN OYSTAEVEN F. Methods of graded rings[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[10] ASENSIO M J, RAMOS J A L, TORRECILLAS B. Gorenstein GR-injective and GR-projective modules[J]. Communications in Algebra, 1998, 26(1): 225-240.

[11] ASENSIO M J, LOPEZ RAMOS J A, TORRECILLAS B. Gorenstein gr-flat modules[J]. Communications in Algebra, 1998, 26(10): 3195-3209.

[12] ASENSIO M J, LOPEZ RAMOS J A, TORRECILLAS B. FP-gr-injective modules and gr-FC-rings[M]//Algebra and Number Theory. Boca Raton: CRC Press, 1999.

[13] MAO L X. Strongly Gorenstein graded modules[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2017, 12(1): 157-176.

责任编辑: 赵新科

(上接第555页)

[6] CHIBRIKOV E S. On free Lie conformal algebras[J]. Vestnik Novosibirsk State University, 2004, 4(1): 65-83.

[7] 张海山. Heisenberg 李代数的自同构群及典范 Kac-Moody 代数与可积模的完全可约性[D]. 北京: 首都师范大学, 2003.
ZHANG H S. The automorphism groups of Heisenberg Lie algbras and the standard Kac-Moody algebras and the completely reducible of integrable modules[D]. Beijing: Capital Normal University, 2003. (in Chinese)

[8] 姬广智. Heisenberg 李代数的 Rota-Baxter 算子[D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2019.
JI G Z. Algebr Rota-Baxter operators of Heisenberg Lie algebra[D]. Harbin: Harbin University of Science and Technology, 2019. (in Chinese)

[9] 周春莹. Heisenberg 李代数的自同构及拟自同构[D]. 苏州: 苏州科技大学, 2021.
ZHOU C Y. The quasi-automorphism and automorphism of Heisenberg Lie algebras[D]. Suzhou: Suzhou University of Science and Technology, 2021. (in Chinese)

[10] KANDRI-RODY A, WEISPFENNING V. Non-commutative Gröbner bases in algebras of solvable type[J]. Journal of Symbolic Computation, 1990, 9(1): 1-26.

[11] BOKUT L, CHEN Y Q, KALORKOTI K, et al. Gröbner-Shirshov bases: Normal forms, combinatorial, and decision problems in algebra[M]. New Jersey: World Scientific, 2018.

[12] LI H S. Noncommutative Gröbner bases and filtered-graded transfer[M]. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2002.

[13] KRAUSE G R, LENAGAN T H. Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 2000.

[14] LI H S. Gröbner bases in ring theory[M]. Singapore: World Scientific, 2011.

[15] LI H S. An elimination lemma for algebras with PBW bases[J]. Communications in Algebra, 2018, 46(8): 3520-3532.

[16] LEVANDOVSKYY V, SCHÖNEMANN H. Plural: A computer algebra system for noncommutative polynomial algebras[C]//Proceedings of the 2003 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. New York: Association for Computing Machinery, 2003: 176-183.

[17] LI H S. Noncommutative polynomial algebras of solvable type and their modules[M]. Boca Raton: ChapmanandHall/CRC, 2021.

责任编辑: 赵新科